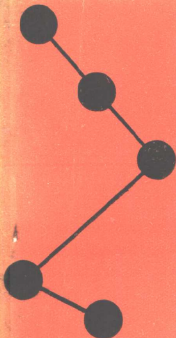


样条边界元法

秦 荣 著

SBEM



广西科学技术出版社

样条边界元法

秦 荣 著

广西科学技术出版社

样条边界元法

秦荣 著

*

广西科学技术出版社出版、发行
（南宁市河堤路14号）
广西大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张14.875 字数332,000
1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷
印数：1—2,000册

ISBN 7—80565—044—6
O·4
定价：5.90元

内 容 介 绍

本书阐述样条边界元法及其应用，共十二章。内容包括样条边界元法的基本原理和基本方法，以及其在位势、弹性力学、板壳、热弹性、振动、几何非线性、材料非线性、断裂力学、接触、电磁场、地应力及工程结构等问题中的应用。书中既有理论分析，又有应用实例。大量计算结果表明，样条边界元法是很有发展前途的方法。

本书对固体力学、结构力学、流体力学、计算力学、土建、水建、桥梁、航空、船舶、采矿、地下工程及机械工程等专业的研究生、大学高年级学生、教师、研究人员、工程技术人员都适用。对学理科的有关人员也有参考价值。

前　言

在实现四个现代化的过程中，各行各业都有许多重要的工程建设项目。在这些工程的设计中包含许多复杂的力学问题，例如：（1）矿山工程中的竖井，国防工程中的导弹发射井，生命线工程中的管道……需要考虑圆柱壳体与周围介质的动力相互作用；（2）在地下工程中，要确定地应力问题，它直接影响着地下工程的设计及施工；（3）在水利及水力发电工程中，设计坝体时，要考虑水与坝的耦合作用，土坝渗流问题；（4）在船舶工程、建筑工程、桥梁工程、机械工程、海洋工程及航空航天工程中，都含有板壳问题、断裂问题及流体力学问题；（5）在各种工程中，都含弹性力学问题、塑性问题、热应力问题、振动问题；（6）在电气工程中，需要对电磁场进行分析；（7）在医学工程中，含有心脏力学、颅骨损伤、腰脊劳损及生物流体力学……因为这些力学问题的理论分析是非常困难的，甚至是不可能的，因此只得采用数值方法。目前常用的数值方法有下列几种：差分法；有限元法；有限条法；加权残数法；样条函数方法和边界元法。

边界元法是近二十年来在边界积分方程解法及有限元法的基础上发展起来的一个数值方法。这个方法的主要优点是适用范围广，所需要的输入数据简单，精确度高，能解决有限元法难以解决的问题。边界元法可以将三维问题化为二维问题，将二维问题化为一维问题。如果选择适当的函数表示边界未知量，则三维问题可以化为一维问题。对于无限域问题，用边界元法解题也非常有效。由于边界元法有上述优点，因此目前国内外对这个方法的研究日益增多，应用日益广泛。在国际上，自 1978 年开始，到

1987年已召开了九次国际边界元法会议；在国内，1985年召开了第一届全国工程中的边界元法会议，并决定1988年在南宁召开第二届全国工程中的边界元法会议。对边界元法的研究虽然时间不长，但已有很多成果。边界元法也有自己的缺点，需要进一步研究和开发。近几年来，作者在上述方法的基础上，提出一个样条边界元法。这个方法程序简单，输入数据少，内存少，适应小机解大题，比一般边界元法优越，是一种经济有效的方法。

本书共有十二章，第一章主要介绍一些与样条边界元法有关的基本概念，作为掌握本书所述方法的一个基础。

第二章主要介绍建立边界积分方程的方法。建立边界积分方程的途径，目前有三种：第一种是利用偏微分方程的基本解；第二种是利用偏微分方程的完备解；第三种是利用柯西积分公式。本章介绍其中几种方法，包括直接法和间接法，而且还介绍了将区域积分化为边界积分的方法。

第三章主要介绍位势问题的样条边界元法。在工程中，许多问题可归结为位势问题，例如，热传导问题，渗流问题，动水压力问题，转扭问题及电磁场问题。利用样条边界元法计算位势问题非常简便。

第四章主要介绍弹性力学问题的样条边界元法。在工程中，许多问题可归结为求解弹性力学问题，例如，坝体应力分析，岩体地应力问题，断裂力学问题，地下结构问题及固体的接触问题。本章列有空腹重力坝的计算例题。

第五章主要介绍板壳的样条边界元法。在许多工程中都有板壳问题，例如，油罐、水池、桥梁、建筑、水利、船舶、飞机、海洋工程等都含有板壳。本章介绍的内容包括开孔板壳、中厚板及薄壳的孔边应力集中问题。

第六章主要介绍热弹性问题的样条边界元法。热应力现象普遍发生在工业建设及国防建设中，许多工程设计需要考虑热应力

问题，例如核电站、火箭、超音速飞机、大型水坝及大跨度桥梁的设计，都需要考虑热应力的影响因素。随着我国四个现代化的发展，热应力问题的分析越来越显得重要。

第七章主要介绍振动的样条边界元法。振动现象普遍发生在自然界。在工程设计中，许多工程结构不仅要作静力分析，而且还要作动力分析，例如，高层建筑要考虑地震和风振的影响；大型水坝要考虑地震的影响；桥梁工程不仅要考虑地震的影响，而且还要考虑桥上动荷载的影响；国防工程要有防御能力，必须考虑炸弹及核武器攻击的影响。

第八章主要介绍几何非线性问题的样条边界元法及摄动——样条边界元法。

第九章主要介绍塑性问题的样条边界元法。塑性问题是一个材料非线性问题，普遍发生在工业建设及国防建设中。如果在工程设计中考虑塑性因素，则可以挖掘材料潜力，提高结构承载能力，使工程经济合理和安全可靠。

第十章主要介绍各种方法的联合应用。各种方法都有自己的优缺点，在实际工作中可以将各种方法相互配合应用。例如：有限元—样条边界元法，解析解—样条边界元法。这样可以发扬优点，避免缺点。杂交出优势。

第十一章主要介绍热传导问题的样条边界元法，不仅对热传导问题及扩散问题适用，而且对波动问题也适用。

第十二章主要介绍几个应用问题，包括断裂力学问题，接触问题，电磁场问题，轴对称弹性体问题，流体与固体耦合动力问题，圆柱厚壳与岩土介质耦合动力问题，结构与地基的相互作用，电磁场与固体的耦合问题及扁壳的简化计算方法。

本书取材主要是作者自己的研究成果。这些成果大多数在国内外已公开发表，反应很好，有的还获得优秀科研成果奖。

样条边界元法应用很广，对弹性力学、塑性力学、断裂力

学、板壳力学、岩体力学、地质力学、生物力学、流体力学、电磁场、热传学、结构动力学及各种工程中的力学问题等方面都适用。

在本书的写作过程中，得到国内许多老前辈和同志们的热情关怀和大力支持；在本书的出版过程中，得到广西区教委会、广西综合设计院、广西力学学会、广西科学技术出版社、工程力学杂志社及广西大学印刷厂的热情帮助和大力支持，现借此机会表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，错误和缺点在所难免，请读者帮助指正。

秦 荣

1987年9月于广西大学

目　　录

第一章　基本概念

本章主要介绍一些与样条边界元法有关的基本概念，作为掌握本书所述方法的一个基础。

§1.1　样条边界元法

科技问题中的边界积分方程可归结为下列积分方程：

$$u(P)+\int_{\Gamma}G(P,s)u(s)ds=f(P) \tag{1.1}$$

式中，$G(P,s)$ 及 $f(P)$ 都是已知函数，s 为边界曲线的弧坐标，P 是边界Γ上的任一点，$u(s)$是边界未知函数。

积分方程（1.1）的精确求解是很困难的，本书采用数值积分法进行求解[1]。为此，在边界Γ上作一个均匀分划(图1.1)：

$$s_0<s_1<s_2<\cdots<s_N$$

$$s_i=s_0+ih,$$

$$h=s_{i+1}-s_i=l/N$$

式中，l 为边界Γ的周长；s_i 为边界结点 i 的弧坐标；$i=0$，1，2，…，N。

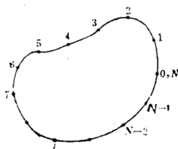


图1.1

式（1.1）的解可以用 B 样条函数来逼近，即

$$u(s)=\sum_{i=0}^{N}u_i\phi_i(s) \tag{1.2}$$

将式（1.2）代入式（1.1）可得：

$$u(P)+\sum_{i=0}^{N}\left(\int_{\Gamma}G(P,\ s)\phi_i(s)ds\right)u_i=f(P)$$

（1.3）

式中$u_i=u(s_i)$；$\phi_i(s)$为B样条函数构成的基函数，在本章§1.2及§1.3中有所介绍，详见文献[2]。

如果设$P=s_j$（$j=0,1,2,\cdots,N$），则式（1.3）可变为

$$u(s_j)+\sum_{i=0}^{N}H_{ji}u_i=f(s_j) \qquad (1.4)$$

$$j=0,1,2,\cdots,N$$

式中

$$H_{ji}=\int_{\Gamma}G(s_i,\ s)\phi_i(s)ds \qquad (1.5)$$

式（1.5）可以用数值积分法进行计算，一般采用高斯求积公式计算。由式（1.4）可得：

$$[A]\{u\}=\{f\} \qquad (1.6)$$

式中 $\{u\}=[u_0\quad u_1\quad u_2\quad\cdots\quad u_N]^T$

$\{f\}=[f(s_0)\quad f(s_1)\quad f(s_2)\quad\cdots\quad f(s_N)]^T$

$$[A]=[I]+[H] \qquad (1.7)$$

$$[H]=[H_{ji}]\quad i,j=0,1,2,\cdots N \qquad (1.8)$$

其中$[I]$为（$N+1$）（$N+1$）的单位矩阵。

$[A]$是一个（$N+1$）（$N+1$）的矩阵。可以证明，$[A]$是一个非奇异矩阵。因此，式（1.6）有唯一的解。利用式（1.6）求出$\{u\}$后，由式（1.2）很容易求出边界积分方程式（1.1）的解。我们把这个方法称为样条边界元法。计算结果表明，样条边界元法是一个经济有效的方法。

§1.2 B样条函数

因为样条边界元法与B样条函数有关，因此本节介绍B样条函数的一些基本概念，作为掌握样条边界元法的一个基础。

n次B样条函数可以利用下列表达式确定[2]：

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\left(x+\frac{n+1}{2}-k\right)_+^n\Big/n! \tag{1.9}$$

式中 $\binom{n+1}{k}=\dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$， $0!=1$。

当$n=1$时，由式(1.9)可得：

$$\varphi_1(x)=\binom{2}{0}(x+1)_+-\binom{2}{1}x_++\binom{2}{2}(x-1)_+$$
$$=(x+1)_+-2x_++(x-1)_+$$

由此可得

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-1,0]\\ 1-x, & x\in[0,1]\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

$\varphi_1(x)$称为一次B样条函数，它的曲线形状如图1.2a所示。

当$n=2$时，由式(1.9)可得：

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}\left[\binom{3}{0}\left(x+\frac{3}{2}\right)_+^2-\binom{3}{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)_+^2\right.$$
$$\left.+\binom{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)_+^2-\binom{3}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)_+^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)_+^2-3\left(x+\frac{1}{2}\right)_+^2+3\left(x-\frac{1}{2}\right)_+^2\right.$$

$$-\left(x-\frac{3}{2}\right)_+^2\Big]$$

由此可得：

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}\begin{cases}\left(\frac{3}{2}+x\right)^2, & x\in\left[-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right]\\ \left(\frac{3}{2}+x\right)^2-3\left(\frac{1}{2}+x\right)^2, & x\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]\\ \left(\frac{3}{2}-x\right)^2, & x\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]\\ 0, & |x|\geqslant 3/2\end{cases}$$

$\varphi_2(x)$称为二次B样条函数，它的曲线形状如图1.2b所示。

当$n=3$时，由式（1.9）可得：

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{6}\Big[(x+2)_+^3-4(x+1)_+^3+6x_+^3-4(x-1)_+^3$$
$$+(x-2)_+^3\Big]$$

由此可得：

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{6}\begin{cases}(x+2)^3, & x\in[-2,\ -1]\\ (x+2)^3-4(x+1)^3, & x\in[-1,\ 0]\\ (2-x)^3-4(1-x)^3, & x\in[0,\ 1]\\ (2-x)^3, & x\in[1,\ 2]\\ 0, & |x|\geqslant 2\end{cases}$$

$\varphi_3(x)$称为三次B样条函数，它的曲线形状如图1.2c所示。

B样条函数有下列几个主要特性：

（1）分段光滑性，$\varphi_n(x)$是一个分段的n次项式。

（2）对称性，$\varphi_n(-x)=\varphi_n(x)$。

（3）可微性，$\varphi_n(x)\in C_{n-1}(-\infty,\ \infty)$。

（4）紧凑性，$\varphi_n(x)$在区间$\left[-\frac{n+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right]$之外恒等于零。

(5) 可以线性组合。

(6) $\varphi_n(x+c)$ 与 $\varphi_n(x)$之间，彼此只差一个平移[2]。

为了今后计算方便起见，$\varphi_2(x)$可以写成下列形式：

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}\begin{cases}0, & x\leqslant -2\\ (x+2)^2, & x\in[-2,-1]\\ (x+2)^2-3(x+1)^2, & x\in[-1,0]\\ (x-1)^2, & x\in[0,1]\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases} \tag{1.10}$$

它的曲线形状如图 1.2d 所示，与图 1.2b 只差一个平移。

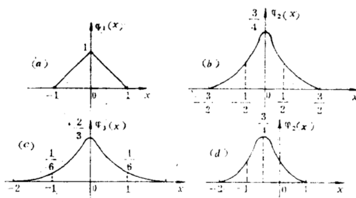


图 1.2

如果对于给定的区间[a, b]作一个均匀分划：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$$

$$x_i=x_0+ih,\ \ h=x_{i+1}-x_i=(b-a)/N$$

则 $$\varphi_n\left(\frac{x-x_i}{h}\right)=\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{h}-i\right)$$

也是一个B样条函数，记为$\varphi_{ni}(x)$。这时

$$\varphi_{1i}(x)=\frac{1}{h}\begin{cases}0, & x\leqslant x_{i-1}\\ x-x_{i-1}, & x\in[x_{i-1}, x_i]\\ x_{i+1}-x, & x\in[x_i, x_{i+1}]\\ 0, & x\geqslant x_{i+1}\end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(x)=\frac{1}{2h^2}\begin{cases}0, & x\leqslant x_{i-2}\\ (x-x_{i-2})^2, & x\in[x_{i-2}, x_{i-1}]\\ (x-x_{i-2})^2-3(x-x_{i-1})^2, & \\ & x\in[x_{i-1}, x_i]\\ (x_{i+1}-x)^2, & x\in[x_i, x_{i+1}]\\ 0, & x\geqslant x_{i+1}\end{cases}$$

$$\varphi_{3i}(x)=\frac{1}{6h^3}\begin{cases}0, & x\leqslant x_{i-2}\\ (x-x_{i-2})^3, & x\in[x_{i-2}, x_{i-1}]\\ (x-x_{i-2})^3-4(x-x_{i-1})^3, & \\ & x\in[x_{i-1}, x_i]\\ (x_{i+2}-x)^3-4(x_{i+1}-x)^3, & \\ & x\in[x_i, x_{i+1}]\\ (x_{i+2}-x)^3, & x\in[x_{i+1}, x_{i+2}]\\ 0, & x\geqslant x_{i+2}\end{cases}$$

它们的曲线形状与图 1.2 相同，只差一个平移。

本节对 B 样条函数只作一些简单的介绍，详细内容见文献 2]。

§1.3 基函数

如果在边界上作一个均匀分划：

$$s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_N$$

$$s_i = s_0 + ih, \quad h = s_{i+1} - s_i = l/N$$

则边界未知量可用 n 次 B 样条函数来逼近[2]。本节以三次以下的 B 样条函数为例来说明。

（一）利用一次B样条函数表示边界未知量

设 u_i 是 $s = s_i$ 的边界未知量的值，则

$$u = \sum_{i=0}^{N} u_i \phi_i(s) = [\phi]\{u\} \tag{11.1}$$

式中 $\{u\} = [\, u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N \,]^T$

$[\phi] = [\, \phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_N \,]$

其中 $\phi_i(s)$ 是一组与一次B样条函数有关的基函数，即

$$\phi_i(s) = \varphi_1\left(\frac{s - s_i}{h}\right) = \varphi_1\left(\frac{s - s_0}{h} - i\right) \tag{1.12}$$

由此可知

$$\phi_i(s_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

因此

$$[B] = [\phi_i(s_j)] = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}_{(N+1)(N+1)} \tag{1.13}$$

（二）利用二次B样条函数表示边界未知量

设 u_i 是边界 Γ 上 s_i 点的边界未知量，则边界未知量的表

达式可采用下列形式：

$$u(s) = \sum_{i=0}^{N} u_i \phi_i(s) = [\phi]\{u\} \tag{1.14}$$

式中 $\{u\} = [\ u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N\ ]^T$

$[\phi] = [\ \phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_N\ ]$

$$\phi_i(s) = 2\varphi_2\left(\frac{s-s_0}{h} - i\right) - \frac{1}{2}\varphi_2\left(\frac{s-s_0}{h} - i + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\varphi_2\left(\frac{s-s_0}{h} - i - \frac{1}{2}\right)$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{1.15}$$

由式（1.15）可知：

$$\phi_i(s_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.16}$$

$\phi_i(s)$ 的数值可利用本章附录的结果进行计算。

（三）利用三次B样条函数表示边界未知量

如果设 u_0 及 u_N 分别为 s_0 点及 s_N 点的边界未知量的值，而 a_1，a_2，…，a_{N-1} 为任意参数，则边界未知量的表达式可以采用下列形式：

$$u(s) = \sum_{i=0}^{N} a_i \phi_i(s) = [\phi]\{a\} \tag{1.17}$$

式中 $a_0 = u_0 \qquad a_N = u_N$

$\{a\} = [\ u_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{N-1} \quad u_N\ ]^T$

$[\phi] = [\ \phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_N\ ]$

这里 $\phi_i(s)$ 是一组与三次B样条函数有关的基函数，即

$$[\phi] = [\varphi_{3k}][Q] \quad k = -1, 0, 1, 2, \cdots, N+1 \tag{1.18}$$

式中 $\varphi_{3i}(s) = \varphi_3\left(\frac{s-s_k}{h}\right) = \varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h} - k\right)$

$$(1.19)$$

$$[Q] = \mathrm{diag}\,([g],\ [I],\ [h]) \qquad (1.20)$$

$$[g] = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [h] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad (1.21)$$

其中〔 I 〕为（ $N-1$ ）（ $N-1$ ）的单位矩阵。由上述可知：

$$[B] = [\ \varphi_{3k}(s_j)\ ]$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{(N+1)(N+3)} \qquad (1.22)$$

如果设 u_i 为 $u(s)$ 在 s_i 点的值，u_0' 及 u_N' 为 $u(s)$ 分别在 s_0 点及 s_N 点对 s 的导数，则边界未知量的表达式可采用下列形式：

$$u(s) = [\ \varphi_{3k}(s)\ ][Q]\{u\} \quad k = -1, 0, 1, \cdots, N+1 \qquad (1.23)$$

式中 $\{u\} = [\ u_{-1}\ \ u_0\ \ u_1\ \ \cdots\ \ u_N\ \ u_{N+1}\ ]^T$

$u_{-1} = h\,(\partial u/\partial s)_0 = hu_0'$

$u_{N+1} = h\,(\partial u/\partial s)_N = hu_N'$

$$[Q] = [\ S\ ]^{-1} \qquad (1.24)$$

$$
[S]=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}
T_1 & T_2 & T_3 & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & 0 & \\
 & 1 & 4 & 1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & 0 & & 1 & 4 & 1 & \\
 & & & R_1 & R_2 & R_3 &
\end{pmatrix}_{(N+3)(N+3)} \qquad (1.25)
$$

其中　$R_1=T_1=-3$，$R_2=T_2=0$，$R_3=T_3=3$。

如果 $\{u\}=[hu_0' \quad u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_N \quad h^2u_N'']^T$，则 $R_1=R_3=6$，$R_2=-12$。

式(1.23)是边界未知量表达式的一般形式。为了获得定解方程，可以根据具体情况对 u_0、u_0'、u_0'' 及 u_N、u_N'、u_N'' 作适当的删改和调整，使得方程中的未知量的个数等于方程式的个数，并满足定解条件。如果式(1.23)中的 $\{u\}$ 采用下列形式：

$$\{u\}=[u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N]^T$$

则在式(1.25)中删去第一行第一列及最后一行一列；在式(1.22)中删去第一列及最后一列就适用了。

如果边界未知量采用下列形式：

$$u(s)=\sum_{i=0}^{N}u_i\phi_i(s) \qquad (1.26)$$

则
$$
\begin{aligned}
\phi_i(s)=&\frac{10}{3}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h}-i\right)\\
&-\frac{4}{3}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h}-i+\frac{1}{2}\right)\\
&-\frac{4}{3}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h}-i-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{6}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h}-i+1\right)\\
&+\frac{1}{6}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h}-i-1\right)
\end{aligned}
$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{1.27}$$

由此可知 $\phi_i(s_j)=\delta_{ij}$ (1.28)

§1.4 广义函数

广义函数是现代偏微分方程理论的一个重要工具，对建立边界积分方程也非常有效，本节只介绍广义函数的一些基本概念，不追求自身理论的完整性。

（一）δ 函数

设 $M=M(x,\ y,\ z)$ 及 $M_0=M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 是区域 Ω 内的任意两点，M_0 是一个固定点。如果

$$\delta(M-M_0)=\begin{cases}\infty, & M=M_0\\ 0, & M\neq M_0\end{cases} \tag{1.29}$$

$$\int_\Omega \delta(M-M_0)\,d\Omega=\begin{cases}1, & M_0\in\Omega\\ 0, & M_0\overline{\in}\Omega\end{cases} \tag{1.30}$$

则称 $\delta(M-M_0)$ 为 δ 函数。

如果 $\varphi(M)$ 在 M_0 处连续，则

$$\int_\Omega \delta(M-M_0)\varphi(M)\,d\Omega=\begin{cases}\varphi(M_0), & M_0\in\Omega\\ 0, & M_0\overline{\in}\Omega\end{cases} \tag{1.31}$$

由上述可知，δ 函数有下列性质：

（1） δ 函数是一个偶函数，即

$$\delta(-x)=\delta(x),\quad \delta(-x,\ -y,\ -z)=\delta(x,\ y,\ z)$$

(2) $\delta(x, x_0)=\delta(x-x_0)=\delta(x_0-x)$

(3) 三维 δ 函数可以写成下列形式：

$$\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

(4) 如果设

$$(\delta,\varphi)=\int_\Omega \delta(M-M_0)\varphi(M)d\Omega \qquad (1.32)$$

则
$$(\partial\delta,\varphi)=-(\delta, \partial\varphi) \qquad (1.33)$$

$$(\partial^m\delta,\varphi)=(-1)^m(\delta,\partial^m\varphi) \quad m>0 \qquad (1.34)$$

$$[\partial^m\delta(x-P),\varphi(x)]=(-1)^m\partial^m\varphi(P) \quad P\in\Omega \qquad (1.35)$$

式中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$\partial^m\varphi=\frac{\partial^m\varphi}{\partial x_1^a\partial x_2^b\cdots\partial x_n^e}, \qquad a+b+\cdots+e=m \qquad (1.36)$$

(二)广义函数

广义函数是指某一基本空间上的线性连续泛函。由此可知，广义函数依赖于所取的基本空间。

1. 基本空间

设 R^n 是 n 维欧氏空间，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变化范围为整个 R^n 空间。现在来定义一个常用的基本空间，设 D 是 R^n 上无穷可微且在不同有限域外恒等于零的函数 $\varphi(x)$ 的全体，这些函数 $\varphi(x)$ 称为基本函数。D 称为基本空间，记为 $D(R^n)$ 或 $C_0^\infty(R^n)$。

基本函数 $\varphi(x)$ 可以相加和数乘，其结果还是基本函数。因此，D 是一个线性空间。另外，在 D 中，如果基本函数序列 $\{\varphi_n\}$ 的所有 $\varphi_n(x)$ 在同一有限区域外等于零，并且 $\{\varphi_n\}$ 及

其各阶导数在这有限区域上一致收敛于零，则这个序列$\{\varphi_n\}$在D中收敛于零，记为$\varphi_n \to 0$。这就是基本空间D中的收敛性。

由上述可知，基本空间D是由所有在R^n中无穷可微，且在不同有限域外恒等于零的函数$\varphi(x)$所组成。

2. 线性连续泛函

如果在基本空间D中，每个基本函数$\varphi(x)$都对应着一个实数(f,φ)，且满足下列条件：

（1）线性性质。对于任意两个实数α、β和任意两个基本函数$\varphi(x)$、$\psi(x)$，则有

$$(f,\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha(f,\varphi)+\beta(f,\psi) \quad \varphi,\psi\in D \tag{1.37}$$

（2）连续性性质。如果基本函数序列φ_1，φ_2，…，φ_n在空间D中趋于零，则对应的序列(f,φ_1)，(f,φ_2)，…，(f,φ_n)收敛于零，则f称为D上的一个线性连续泛函。例如

$$(f,\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx \qquad \varphi\in D \tag{1.38}$$

在D上给定了一个线性连续泛函$f(x)$。

3. 广义函数

D上的线性连续函数f称为D上的广义函数，记为(f,φ)。由式（1.32）及式（1.38）对比可知，δ函数是一个广义函数。

（三）广义函数的极限

如果对于任意的基本函数，广义函数序列f_1，f_2，…，f_n有

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\varphi)=(f,\varphi) \tag{1.39}$$

则这个广义函数序列收敛于广义函数f。

事实上，如果取$\varphi(x)$为某一个基本函数，并取G为某一个

区域，使得在它的外部$\varphi(x)$等于零，这时根据积分号下取极限的定理可得：

$$(f_n,\varphi)=\int_G f_n(x)\varphi(x)dx\to\int_G f(x)\varphi(x)dx=(f,\varphi) \tag{1.40}$$

（四）广义函数的导数

如果函数$F(x)$连续且有连续导数，$\varphi\in D$，φ在$[a,b]$外为0，则可造出如下的泛函：

$$(F',\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}F'(x)\varphi(x)dx$$

式中F'代表F对x的导数。利用分部积分法可得：

$$\begin{aligned}(F',\varphi)&=F(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\varphi'(x)dx\\&=-(F,\varphi')\end{aligned} \tag{1.41}$$

这是定义广义函数的导数的基础。

设f是基本空间D上的任一线性连续泛函，则

$$(f',\varphi)=-(f,\varphi')\quad \forall\varphi\in D(R^n) \tag{1.42}$$

由于φ是无穷可微的，(f,φ')有意义，而$\varphi_n\to\varphi$意味着各阶导数都一致收敛于φ的相应导数，因此广义函数的导数仍然是广义函数。每一个广义函数都有导数，故可以定义高阶导数。

在多变数的情况下，每个广义函数对每个独立变数x_1，x_2，…，x_n的偏导数为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi\right)=-\left(f,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.43}$$

由于广义函数的导数仍然是广义函数，因此可以定义高阶导数：

$$(\partial^m f,\varphi)=(-1)^m(f,\partial^m\varphi),\ \forall\varphi\in D(R^n) \tag{1.44}$$

由上述可知：

（1）广义函数的任意阶导数存在。

（2）广义函数的混合导数与它求导的次序无关。例如

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \tag{1.45}$$

事实上，

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi\right) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial_2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \varphi\right), \quad \forall \varphi \in D(R^n)$$

所以式（1.45）成立。

如果我们定义 $f_n \to f$ 为 $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$ 对一切 $\varphi \in D$ 成立，则

$$\lim_{n\to\infty}(f', \varphi) = -\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi') = -(f, \varphi')$$

$$= (f', \varphi) = \left((\lim_{n\to\infty} f_n)', \varphi\right) \tag{1.46}$$

（五）特殊的广义函数

设 ω_{n-1} 为 $n-1$ 维单位球面的表面积，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 代表 R^n 中的一点，则定义函数 S_i 为[8]

$$S_i = \frac{x_i}{\omega_{n-1} r^n} \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad n \geqslant 2 \tag{1.47}$$

式中 $\quad r = \sqrt{x_i x_i} \tag{1.48}$

由上述可知：$S_{i,i} = \delta(x)$ （1.49）

式中 $F_{,i} = \partial F/\partial x_i$。本节采用重复相乘指标 求 和 的约定（见

§1.6)。

现在定义一个特殊的广义函数：

$$N_i = S_i + M_i \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (1.50)$$

式中 M_i 及其导数是有界的，且

$$M_{i,i} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (1.51)$$

由此可知： $N_{i,i} = S_{i,i} = \delta(x)$ (1.52)

设 Γ_ε 为 R^n 中半径为 ε 的球面边界（图1.3），P 点为球面的中心，则对式（1.50）定义的广义函数 N_i 和任一 $\varphi \in D(R^n)$ 有

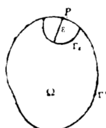


图1.3

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} N_i(x-P) n_i \varphi(x) d\Gamma(x)$$

$$= C(P)\varphi(P) \qquad (1.53)$$

式中 n_i（$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）是 Γ_ε 上法向矢量在 x_i 方向的分量。

证明　把式（1.50）代入式（1.53）便得

$$H = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_i(x-P) n_i(x) \varphi(x) d\Gamma(x)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} M_i(x-P) n_i(x) \varphi(x) d\Gamma(x) \qquad (1.54)$$

由 M_i 的性质可知：

$$|M_i n_i \varphi| \leqslant A < \infty$$

又因为当 $\varepsilon \to 0$ 时，Γ_ε 的面积趋于零，则

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} M_i(x-P) n_i(x) \varphi(x) d\Gamma(x)$$

$$= A \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma(x) = 0$$

因此 $$H = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_i(x-P)\, n_i(x)\, \varphi(x)\, d\Gamma(x) \tag{1.55}$$

又因为

$$S_i(x-p)\, n_i(x) = \frac{(x_i - \xi_i) n_i}{\omega_{n-1} r^n} = \frac{n_i n_i}{\omega_{n-1} r^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{\omega_{n-1} \varepsilon^{n-1}} \tag{1.56}$$

则 $$H = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\omega_{n-1} \varepsilon^{n-1}} \int_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(x) d\Gamma(x) \tag{1.57}$$

利用积分中值定理可得：

$$H = \varphi(P) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\omega_{n-1} \varepsilon^{n-1}} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma = C(P)\varphi(P) \tag{1.58}$$

式中 $$C(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\omega_{n-1} \varepsilon^{n-1}} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma \tag{1.59}$$

命题得证。

§1.5 基本解

边界元法要把微分方程定解问题化为边界积分方程问题进行求解，在这个变换过程中，微分方程的基本解起着很大的作用。因此，本节介绍基本解的概念及求解方法。

（一）基本解的概念

设已知一个线性微分方程

$$Lu = 0 \tag{1.60}$$

如果能够找到一个广义函数 $u^* \in D(R^n)$，使

$$Lu^* = \delta \tag{1.61}$$

成立，则称 u^* 为微分方程式（1.60）的基本解。

微分方程的基本解不是唯一的。例如，如果 u_i 是式(1.50）的任意解，而 u^* 是式（1.60）的基本解，则

$$L(u_i + u^*) = Lu_i + Lu^* = 0 + \delta = \delta$$

如何求基本解？求基本解的方法有好几种，本节通过求Laplace方程和双调和方程的基本解来介绍一种求基本解的方法。

（二）Laplace 方程的基本解

1．二维问题

二维 Laplace 方程为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.62}$$

它的基本解 u^* 满足下列方程：

$$\nabla^2 u^* = \delta(M - M_0) \qquad M \in \Omega \tag{1.63}$$

当 $M \neq M_0$ 时，则上式便变为

$$\nabla^2 u^* = 0 \qquad M \neq M_0 \tag{1.64}$$

我们以 M_0 为圆心，将式（1.64）化为极坐标形式

$$\nabla^2 u^* = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = 0 \tag{1.65a}$$

并讨论式（1.65a）的圆对称解，此时 u^* 与 θ 无关，因而式（1.65a）便变为下列形式：

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du^*}{dr}\right) = 0 \qquad r > 0 \tag{1.65b}$$

式中 $r = \overline{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

式（1.65b）的通解为

$$u^* = A + B\ln r \tag{1.66}$$

在式（1.66）中取 $A = 0$，B 可以利用第二格林公式确定，这时第二格林公式可以写成下列形式：

$$\int_{\Omega}(u\nabla^2 u^* - u^*\nabla^2 u)d\Omega = \int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma$$

设 $u = 1$，则上式变为

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u^*}{\partial u}d\Gamma = \int_{\Omega}\nabla^2 u^* d\Omega \tag{1.67a}$$

将式（1.63）代入式（1.67a）便得：

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u^*}{\partial n}d\Gamma = 1 \tag{1.67b}$$

因为讨论式（1.65）的圆对称解，则上式左边变为

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u^*}{\partial n}d\Gamma = \int_0^{2\pi}\frac{\partial u^*}{\partial r}rd\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}(B\ln r)rd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{B}{r}rd\theta = 2\pi B$$

将上式代入式（1.67b）便得 $B = 1/2\pi$。因此由式（1.66）可得式（1.62）的基本解，即

$$u^* = \frac{1}{2\pi}\ln r = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

对于二维无限大域，可以看作以 M_0 为圆心的无限大圆，半径为∞。

2.三维问题

三维 Laplace 方程为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.68}$$

它的基本解 u^* 满足下列方程：

$$\nabla^2 u^* = -\delta(M - M_0) \qquad M \in \Omega \qquad (1.69)$$

当 $M \neq M_0$ 时，则上式便变为

$$\nabla^2 u^* = 0 \qquad M \neq M_0 \qquad (1.70)$$

我们以 M_0 为球心，将式（1.70）化为球坐标形式，并讨论式（1.70）的球对称解，此时 u^* 与 θ 及 φ 无关，则式（1.70）便变为下列形式：

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du^*}{dr}\right) = 0 \qquad (1.71)$$

式中 $r = \overline{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

式（1.71）的通解为

$$u^* = A + B/r \qquad r > 0 \qquad (1.72)$$

在式（1.72）中令 $A = 0$，B 由式（1.67a）确定。将式（1.69）代入式（1.67a）便得：

$$\int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = -1 \qquad (1.73a)$$

因为讨论式（1.70）的球对称解，则上式便变为

$$\int_S \frac{\partial u^*}{\partial r} ds = -1 \qquad (1.73b)$$

将式（1.72）代入式（1.73b）便得：

$$\int_S \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B}{r}\right) ds = -1 \qquad (1.73c)$$

式中 S 是以 M_0 为球心及 ε 为球半径的面。上式在边变为

$$\int_S \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B}{r}\right) ds = -\int \frac{B}{r^2} ds = -\frac{B}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2$$

$$= -4\pi B$$

将上式代入式（1.73c）便得 $B=1/4\pi$。因此由式（1.72）可得式（1.68）的基本解，即

$$u^*=1/4\pi r$$

对于三维无限大域，可以看作以 M_0 为球心的无限大球，半径为∞。

（三）双调和方程的基本解

双调和方程为

$$\nabla^4 u=\nabla^2\nabla^2 u=0 \qquad (x,y)\in\Omega \tag{1.74}$$

它的基本解满足下列方程：

$$\nabla^2\nabla^2 u^*=\delta(M-M_0) \tag{1.75}$$

当 $M\neq M_0$ 时，则式（1.75）变为

$$\nabla^2(\nabla^2 u^*)=0 \tag{1.76}$$

式中 ∇^2 是 laplace 算子。考虑式（1.75）的圆对称解，则

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) \tag{1.77}$$

若将 $\nabla^2 u^*$ 看成一个广义函数，则由式（1.76）可知：

$$\nabla^2 u^*=\frac{1}{2\pi}\ln r$$

即

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)u^*=\frac{1}{2\pi}\ln r \tag{1.78}$$

将式（1.78）进行积分可得：

$$u^*=\frac{1}{8\pi}(r^2\ln r-r^2) \tag{1.79}$$

由于（$-r^2/8\pi$）是 $\nabla^4 u^*=0$ 的正则解，所以可以将这一

项删去，故式（1.74），基本解可以采用下列形式：

$$u^* = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r \tag{1.80}$$

当圆域的半径为∞时，则这个圆域便为二维无限大域。

微分方程基本解的求解是一个比较复杂的问题，可以根据不同的问题采用不同的方法。对于某些方程利用广义 Fouier 变换法比较方便。

§1.6 张量

张量理论在现代力学中也被广泛采用。在笛卡尔直角坐标系中表示的张量称为笛卡尔张量，这是一种最常用的张量。本节主要介绍一些有关笛卡尔张量的基本知识，作为掌握样条边界元法的一个基础。

（一）求和约定

1. 指标符号

在笛卡尔坐标中，如果设 $x = x_1$，$y = x_2$，$z = x_3$，则物体任一点 P 的坐标记为 x_i，这种记法叫做指标表示法。x_i 称为指标符号，i 称为下指标。如果 i 在 x 右上方则称为上指标。

2. 爱因斯坦求和约定

在同一项中重复出现两次的字母标号，称为求和标号。它表示将该标号按顺序1，2，3轮换时所得各项之和，这就是求和约定。例如

$$\left.\begin{aligned} a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_{ij} b_j &= a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3 \\ a_{ii} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \end{aligned}\right\} \tag{1.81}$$

这种在同一项中重复出现两次的指标称为哑标或伪标。由于哑标只意味着求和，因此，无论采用那个字母表示这个指标，表达式都不会改变，例如 $a_i b_i = a_j b_j = a_k b_k$。在同一项中不重复出现的指标称为自由指标。在同一方程中，各项的自由指标应该相同，例如

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1.82)$$

式（1.82）可以写成下列形式：

$$a_{ij}x_j = b_i \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3 \qquad (1.83)$$

3. 导数表示法

在一指标前加逗号表示对该逗号后的所有指标所对应的坐标求导数，例如

$$F_{,i} = \partial F/\partial x_i,\quad F_{,ij} = \partial^2 F/\partial x_i \partial x_j$$

$$u_{i,i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \qquad (1.84)$$

利用求和约定及导数表示法，可以简化各种方程，例如：

（1）弹性力学平衡方程可写成下列形式：

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3$$

（2）调和方程 $\nabla^2 u = 0$ 可写成下列形式

$$u_{,ii} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

4. 注意几点

（1）哑标可以替换。例如，$D_{kj,k} = D_{mj,m} = D_{ij,i}$。

（2）哑标总是成对地出现在同一项中。例如，$A_{ii}x_i$ 的意义是

不明确的，因此这是非法的。

（3）一个指标不能既是哑标又是自由指标。例如，$A_{ii}=b_i$ 及 $A_{ij}+B_{ii}$ 的记法是非法的。

（4）不要乱用乘幂。例如：

$$A_{kk}^2 \neq (A_{kk})^2, \quad \sqrt{x_k x_k} \neq x_k$$

（二）克罗内克δ符号

克罗内克δ符号的定义为

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k\neq l \end{cases} \tag{1.85}$$

它有下列性质：

（1） $\delta_{kl}=\delta_{lk}$

（2） $\delta_{kk}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3 \quad (k=1,2,3)$

（3） $\delta_{km}a_m=a_k$ （1.85）

例如 $\delta_{1m}a_m=\delta_{11}a_1+\delta_{12}a_2+\delta_{13}a_3=a_1$

$\delta_{2m}a_m=\delta_{21}a_1+\delta_{22}a_2+\delta_{23}a_3=a_2$

$\delta_{3m}a_m=\delta_{31}a_1+\delta_{32}a_2+\delta_{33}a_3=a_3$

（4） $\delta_{im}A_{mk}=A_{ik}$ （1.87）

例如 $\delta_{1m}A_{mk}=\delta_{11}A_{1k}+\delta_{12}A_{2k}+\delta_{13}A_{3k}=A_{1k}$

$\delta_{2m}A_{mk}=\delta_{21}A_{2k}+\delta_{22}A_{2k}+\delta_{23}A_{3k}=A_{2k}$

$\delta_{3m}A_{mk}=\delta_{31}A_{3k}+\delta_{32}A_{2k}+\delta_{33}A_{3k}=A_{3k}$

同理可证： $\delta_{mi}A_{km}=A_{ki}$ （1.88）

（5） $\delta_{im}\delta_{mk}=\delta_{ik}$

$\delta_{ik}\delta_{ik}=\delta_{ik}\delta_{ki}=\delta_{ii}=3 \quad (i,j=1,2,3)$ （1.89）

同理可证： $\delta_{im}\delta_{mk}\delta_{kn}=\delta_{in}$

$A_iB_j\delta_{ik}=A_iB_k, \quad A_{ij}B_j\delta_{ik}=A_{kj}B_j$

$A_iB_jC_k\delta_{mj}\delta_{ki}=A_kB_mC_k$ （1.90）

在张量分析中，广泛地应用克罗内克 δ 符号的性质简化书写及缩减运算过程。

（三）笛卡尔张量

如果有一个矢量 $\vec{X}$，它在有共同原点的新旧两个笛卡尔坐标系中，坐标分别为（x_1，x_2，x_3）及（x'_1，x'_2，x'_3），则这些坐标分量之间有下列关系：

$$x'_i = a_{ij} x_j \qquad i,j = 1，2，3 \tag{1.91}$$

式中 $a_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$。实际上 x_i 是矢量 $\vec{X}$ 的分量，这是一阶张量的例子。式（1.91）为转动变换公式。

如果 F_i 及 F_j 是两个矢量的分量，记 $F_{ij} = F_i F_j$，在笛卡尔坐标系中，经过坐标转动变换，则有

$$F'_{ij} = F'_i F'_j = a_{ik} F_k a_{jl} F_l = a_{ik} a_{jl} F_{kl} \tag{1.92}$$

实际上 F_{ij} 是两个矢量的外积，这是二阶张量的例子。

如果 F_i、F_j 及 F_k 是三个矢量的分量，记 $F_{ijk} = F_i F_j F_k$。在笛卡尔坐标系中，经过坐标转动变换，则有

$$F'_{ijk} = F'_i F'_j F'_k = a_{il} a_{jm} a_{kn} F_{lmn} \tag{1.93}$$

实际上 F_{ijk} 是三个矢量的外积，这是三阶张量的例子。

定义 一个 r 阶笛卡尔张量是由 3^r 个分量组成的量，而且满足下列变换关式：

$$F'_{ijkl\cdots} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} \cdots F_{mnpq\cdots} \tag{1.94}$$

式（1.94）称为 r 阶张量转换定律。$F_{ijkl\cdots}$ 为 r 阶张量的分量。例如，二阶张量是一个由 3^2 个分量 F_{ij}（$i,j = 1,2,3$）组成的量，且满足下列转换关系：

$$F'_{ij} = a_{im}a_{jn}F_{mn} \tag{1.95}$$

式（1.95）是二阶张量转换定律。F_{ij}为二阶张量的分量。

如果将式（1.95）两边乘以 $a_{ip}a_{jq}$，则

$$a_{ip}a_{jq}F'_{ij} = a_{ip}a_{jq}a_{im}a_{jn}F_{mn}$$

因为 $a_{ip}a_{jm} = \delta_{pm}$，$a_{jq}a_{jm} = \delta_{qn}$

因此 $\delta_{pm}\delta_{qn}A_{mn} = a_{ip}a_{jm}A'_{ij}$

故 $$A_{pq} = a_{ip}a_{jq}A'_{ij} \tag{1.96}$$

式（1.96）是二阶张量逆转换定律。

可以证明，δ_{ij}是一个二阶张量的分量。

（四）张量代数运算

张量运算必须符合下列原则：运算的结果仍然是张量。本节主要介绍张量代数的基本运算，内容包括张量的加法、减法、内积、外积和缩并。

1. 相等

若两个张量$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$相等，它们各对应的分量必须相等，即

$$A_{ijk\cdots} = B_{ijk\cdots}$$

2. 加法及减法

两个n阶张量的和或差是一个同阶的张量，它的分量等于这两个张量的相应分量之和或差。例如，设张量$\underset{\sim}{C}$为张量$\underset{\sim}{A}$及张$\underset{\sim}{B}$之和，则

$$C_{ijk\cdots} = A_{ijk\cdots} + B_{ijk\cdots}$$

3. 数乘

张量$\underset{\sim}{A}$与数k相乘，产生一个新的张量$\underset{\sim}{B}$，它的分量为B_{ij} $=kA_{ij}$。

4. 外积

一个m阶张量和一个n阶张量的外积是一个$m+n$阶张量，它的分量由上述两个张量的各个分量的乘积组成。例如，如果有一个一阶张量和一个二阶张量的分量分别为B_i及T_{jk}，这两个张量的外积应该是三阶张量，它的分量为

$$P_{ijk}=B_iT_{jk} \qquad i,j,k=1,2,3$$

证明　因为$B'_i=a_{il}B_l$，$T'_{jk}=a_{jm}a_{kn}T_{mn}$

因此　$P'_{ijk}=B'_iT'_{jk}=a_{il}a_{jm}a_{kn}B_lT_{mn}$

由此可得：　$P'_{ijk}=a_{il}a_{jm}a_{kn}P_{lmn}$

故P_{ijk}是一个三阶张量。

如果有一个二阶张量和一个三阶张量的分量分别为F_{ij}及S_{kmn}，这两个张量的外积应该是一个五阶张量，它的分量为

$$P_{ijkmn}=F_{ij}S_{kmn} \qquad i,j,k,m,n=1,2,3$$

5. 缩并

如果在一个张量的分量中，有两个相同的指标，对于这相同指标求和的运算称为缩并。例如，如果一个三阶张量的分量为B_{ijk}，令$i=j$，则

$$B_{iik}=B_{11k}+B_{22k}+B_{33k}=F_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3)$$

令$i=k$，则

$$B_{iji}=B_{1j1}+B_{2j2}+B_{3j3}=F_j \qquad (j=1,2,3)$$

令$j=k$，则

$$B_{ijj}=B_{i11}+B_{i22}+B_{i33}=F_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

由上述可知，一个三阶张量．通过缩并，便得一个一阶张量；一

个 r 阶张量，通过缩并运算便得一个 $r-2$ 阶张量，而且一个张量的缩并可以重复进行。

6. 内积

如果两个分量分别为 A_{ij} 及 B_{km} 的二阶张量，其外积为 $C_{ijmn}=A_{ij}B_{km}$ 是一个四阶张量，将这四阶张量对不同分量 A_{ij} 及 B_{km} 进行缩并，可得四个内积：

$$C_{ijim}=A_{ij}B_{im} \qquad C_{ijki}=A_{ij}B_{ki}$$
$$C_{ijjm}=A_{ij}B_{jm} \qquad C_{ijkj}=A_{ij}B_{kj}$$

上述每一个内积的结果都是一个二阶张量。

由上述可知，两个张量的内积是将它们的外积对两个不同分量的两个指标进行缩并。二阶张量 $C_{ij}=A_iB_j$ 的内积为

$$C_{ii}=A_iB_i=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$$

这是两个矢量的标量积。

§1.7 数值积分法

在边界积分方程中，边界积分一般可以写成下列形式：

$$(G,\ u)=\int_\Gamma G(P,\ s)u(s)d\Gamma \tag{1.97}$$

如果将整个边界分为 M 个边界区域，则式（1.97）可变为下列形式：

$$(G,\ u)=\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m}G(P,\ s)u(s)d\Gamma \tag{1.98}$$

如果设

$$(G,\ u)_m=\int_{\Gamma_m}G(P,\ s)u(s)d\Gamma \tag{1.99}$$

则 $$(G, u) = \sum_{m=1}^{M} (G,u)_m \tag{1.100}$$

式（1.99）可利用数值积分法的各种求积公式进行离散。下面介绍几种具体做法，供大家参考。

（一）第一种方法

如果将边界 Γ_m 分为 N_m 等分，则式（1.99）可变为

$$(G, u)_m = \sum_{i=0}^{z} \lambda_i G(P, s_i) u(s_i) h_m \tag{1.101}$$

式中 $z = N_m$。如果设 $P = s_j$（$j = 0, 1, 2, \cdots, N$），则式（1.101）便变为

$$[(G, u)]_m = h_m [G]_m [\lambda]_m \{u\}_m \tag{1.102}$$

式中 $$[G]_m = [G(s_j, s_i)]_m \quad j = 0,1,2,\cdots,N \tag{1.103}$$

$$[\lambda]_m = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_z)$$

$$\{u\}_m = [u_0 \quad u_1 \quad u_2 \cdots \quad u_z]^T$$

其中 λ_j 为与数值积分法求积公式有关的系数。例如，对于梯形求积公式，λ_j 采用下列公式：

$$\lambda_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = 0, z \\ 1 & i = 1, 2, \cdots, z-1 \end{cases}$$

对于辛普生求积公式，λ_j 采用下列公式（z 为偶数）：

$$\lambda_j = \begin{cases} 1/3 & i = 0, z \\ 4/3 & i = 1, 3, 5, \cdots, z-1 \\ 2/3 & i = 2, 4, 6, \cdots, z-2 \end{cases} \tag{1.104}$$

（二）第二种方法

利用三次 B 样条函数方法可得下列求积公式[8][9]：

$$\int_a^b f(s)ds = h\left(\frac{h}{12}f_0' + \frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + \frac{1}{2}f_N - \frac{h}{12}f_N'\right) \tag{1.105}$$

式中　$f_i = f(s_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, N$

$h = (b-a)/N$

$f_i' = \partial f(s_i)/\partial s \qquad i = 0, N$

如果将边界 Γ_m 分为 N_m 等分，则利用式（1.105）可将式（1.99）变为下列形式：

$$(G, u)_m = \sum_{i=0}^{z} \lambda_i \widetilde{G}(P, s_i)u(s_i)h_m + \frac{h_m^2}{12}\left[G(P, s_0)u'(s_0) - G(P, s_N)u'(s_N)\right] \tag{1.106}$$

式中　$z = N_m \qquad h_m = s_{i+1} - s_i$

$$\widetilde{G}(P, S_i) = \begin{cases} \widetilde{G}(P, s_i) & i = 0, z \\ G(P, s_i) & i = 1, 2, \cdots, z-1 \end{cases} \tag{1.107}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{G}(P, s_0) &= G(P, s_0) + \frac{1}{6}G'(P, s_0)h_m \\ \widetilde{G}(P, s_N) &= G(P, s_N) - \frac{1}{6}G'(P, s_N)h_m \end{aligned}\right\} \tag{1.108}$$

$$G' = \partial G/\partial s \qquad u' = \partial u/\partial s$$

在实际计算中，可以忽略式（1.108）等号右边的第二项。

如果边界未知量 $u(s)$ 用三次 B 样条函数来逼近，则

$$\begin{aligned} u(s) &= [\phi(s)]\{a\}_m \\ u'(s) &= [\phi'(s)]\{a\}_m \end{aligned} \tag{1.109}$$

式中 $[\phi(s)] = [\varphi_{3k}][Q]_m \quad k = -1,0,1,2,\cdots,z+1$

$$[Q]_m = \mathrm{diag}([g],[I],[h])_m \tag{1.110}$$

其中 $[I]$ 为 $(z-1)(z-1)$ 的单位矩阵。$[g]$ 及 $[h]$ 由式（1.21）确定。

将式（1.109）代入（1.106）可得：

$$[(G,u)]_m = [\widetilde{H}]_m\{a\}_m \tag{1.111}$$

式中 $$[\widetilde{H}]_m = h_m([G]_m[\lambda]_m[B]_m + [G_0]_m[\lambda]_m[B_0]_m)[Q]_m \tag{1.112}$$

$$[G_0]_m = \frac{h_m}{6}\begin{pmatrix} G(s_0,s_0) & 0 & \cdots & 0 & -G(s_0,s_z) \\ G(s_1,s_0) & 0 & \cdots & 0 & -G(s_1,s_z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G(s_N,s_0) & 0 & \cdots & 0 & -G(s_N,s_z) \end{pmatrix}_{(N+1)(z+1)} \tag{1.113}$$

$$[B_0]_m = \frac{1}{2h_m}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(z+1)(z+3)} \tag{1.114}$$

（三）第三种方法

设 $$u(s) = \sum_{i=0}^{z} u_i \phi_i(s) \tag{1.115}$$

则 $$(G,u)_m=\left(\int_{\Gamma_m}G(P,s)\,\phi_i(s)\,d\Gamma\right)u_i \qquad (1.116)$$

式中 $z=N_m$，$\phi_i(s)$为B样条函数构成的基函数，见式(1.12)、式（1.15）和式（1.27），它们满足下列条件：

$$\phi_i(s_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

设 $$(G,\phi_i)_m=\int_{\Gamma_m}G(P,s)\phi_i(s)d\Gamma \qquad (1.117)$$

则 $$(G,u)_m=\sum_{i=0}^{z}(G,\phi_i)_m u_i \qquad (1.118)$$

式（1.117）可以用数值积分法的各种求积公式进行计算。如果采用等距结点的求积公式，则

$$(G,\phi_i)_m=2\sum_{k=0}^{n}\lambda_k G(P_0,\bar{s}_k)\phi_i(\bar{s}_k)h_i \qquad (1.119)$$

式中 $$\left.\begin{aligned}\bar{s}_k&=s_i+kh_i\\ h_i&=(s_{i+1}-s_i)/n\end{aligned}\right\} \qquad (1.120)$$

其中n为区间$[s_i,s_{i+1}]$的分段数，λ_k为数值积分法求积公式的系数。

如果采用不等距结点的高斯求积公式，则

$$(G,\phi_i)_m=h_m\sum_{k=1}^{n}A_k G(P_0,\bar{s}_k)\phi_i(\bar{s}_k) \qquad (1.121)$$

式中 $$\bar{s}_k=\frac{s_i+s_{i+1}}{2}+\frac{s_{i+1}-s_i}{2}s_k \qquad (1.122)$$

$$h_m=s_{i+1}-s_i$$

A_k为高斯求积公式的系数。将式（1.121）代入式(1.118)可得：

$$[(G,u)]_m=[\widetilde{H}]_m\{u\}_m \tag{1.123}$$

式中 $\{u\}_m=[u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_z]^T$

$$[\widetilde{H}]_m=[\widetilde{H}_{ji}] \qquad i=0,1,2,\cdots,z;\ j=0,1,2,\cdots,N \tag{1.124}$$

$$\widetilde{H}_{ji}=h_m\sum_{k=1}^{n}A_kG(s_j,\bar{s}_k)\phi_i(\bar{s}_k) \tag{1.125}$$

$$z=N_m$$

（四）第四种方法

设 $$u(s)=[\varphi_{3i}][Q]_m\{u\}_m \tag{1.126}$$

则 $$(G,u)_m=(G,[\varphi_{3i}])_m[Q]_m\{u\}_m \tag{1.127}$$

式中 $\{u\}_m=[u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_z]^T$

$$(G,[\varphi_{3i}])_m=\int_{\Gamma_m}G(P_0,s)[\varphi_{3i}(s)]d\Gamma \tag{1.128}$$

$$\varphi_{3i}=\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h_m}-i\right) \qquad i=0,1,2,\cdots,z \tag{1.129}$$

$$[Q]_m=[B]^{-1}$$

$$[B]_m=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}_{(z+1)(z+1)} \tag{1.130}$$

如果设 $P_0=s_j(j=0,1,2,\cdots,N)$，则式（1.127）可变为

$$[(G,u)]_m=[\widetilde{H}]_m\{u\}_m \tag{1.131}$$

式中 $[\widetilde{H}]_m=[\Gamma]_m[Q]_m$ （1.132）

$$[\Gamma]_m=[\int_{\Gamma_m}G(s_j,s)\varphi_{3i}(s)d\Gamma] \qquad (1.133)$$

式（1.133）可以用数值积分法的各种求积公式进行计算，其中包含高斯求积公式、梯形求积公式及辛普生求积公式。最好用高斯求积公式。

本节对边界积分的数值积分法作了一些介绍，利用这些方法可以建立边界元法的计算格式。

§1.8 附录（重要资料）

（一）$\varphi_n(x)$的数值表[2]

$\varphi_n(x)$的数值可以利用式（1.9）进行计算，表1.1只列出几个常用的数值。

表1.1 $\varphi_n(x)$的数值表

n \ x	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm\frac{3}{2}$	± 2	± 2
1	1	$\frac{1}{2}$	0	0		
2	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	0	
3	2/3	23/48	1/6	1/48	0	0

（二）基函数$\phi_i(s)$

本节介绍的基函数 $\phi_i(s)$ 由式（1.12）、式（1.15）和式（1.27）确定，它们的图形如图1.4所示。图1.4a为一次B

样条函数构成的基函数 $\phi_i(s)$ 的图形；图1.4b为二次B样条函数构成的基函数 $\phi_i(s)$的图形；图1.4c为三次B样条函数构成的基函数 $\phi_i(s)$ 的图形。由此可知：

$$\phi_i(s_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

三次基函数 $\phi_i(s)$ 的积分为

$$\int_0^1\phi_i(s)ds=146h/288$$

$$\int_1^2\phi_i(s)ds=-3h/288$$

$$\int_2^3\phi_i(s)ds=h/288$$

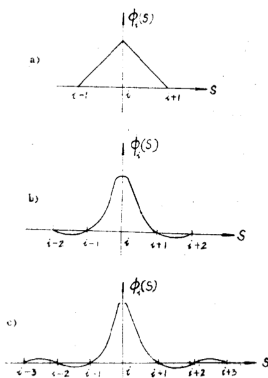


图1.4

由此可知，在实际计算中，对 $\phi_i(s)$ 的积分只在 [－1，1] 内进行积分就行了。

（三）高斯积分法

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{1.134}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_k A_l f(x_k, y_l) \tag{1.135}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_k A_l A_m f(x_k, y_l, z_m) \tag{1.136}$$

其中 x_i 为积分点，A_i 为积分加权系数，见表1.2。

表1.2　x_i 及 A_i 的数值表

n	x_i	A_i
2	± 0.577350269189626	1
3	0 ± 0.774596669241488	0.888888888888889 0.555555555555556
4	± 0.339981043584856 ± 0.861136311594053	0.652145154862546 0.347854845137454
5	0 ± 0.538469310105683 ± 0.906179845938664	0.568888888888889 0.478628670499366 0.2369268856139
6	± 0.238619186083197 ± 0.661209386466265 ± 0.932469514203152	0.467913934572691 0.360761573048139 0.171324492379170

7	0	0.417959183673469
	± 0.405845151377397	0.381830050505119
	± 0.741531185599394	0.279705391489277
	± 0.949107912342759	0.129484966168870
8	± 0.183434642495650	0.362683783378362
	± 0.525532409916329	0.313706645877887
	± 0.796666477413627	0.222381034453374
	± 0.960289856497536	0.101228536290376
9	0	0.33023955001260
	± 0.324253423403809	0.3123470770400003
	± 0.613371432700590	0.260610696402985
	± 0.836031107326636	0.180648160694857
	± 0.968160239507626	0.081274388361574
10	± 0.148874338981631	0.295524224714753
	± 0.433395394129247	0.269266719309996
	± 0.679409568299024	0.219086362515982
	± 0.865063366688985	0.149451349150581
	± 0.973906528517172	0.066671344308688
12	± 0.125233408511469	0.249147045813403
	± 0.367831498998180	0.233492536538355
	± 0.587317954286617	0.2031167426723066
	± 0.769902674194305	0.160078328543346
	± 0.904117256370475	0.106939325995318
	± 0.9815634246719	0.047175336386512

一般积分区域 $[a, b]$ 的高斯求积公式为

$$\int_a^b f(s)ds = \frac{b+a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f(\bar{s}_k) \qquad (1,137)$$

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)d5dy$$

$$= \frac{c-a}{2}\ \frac{d-c}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k A_l f(\bar{x}_k, \bar{y}_l) \qquad (1.138)$$

式中 $\bar{s}_k = \frac{b-a}{2} s_k + \frac{a+b}{2}$

$$\bar{x}_k = \frac{b-a}{2} x_k + \frac{a+b}{2}$$

$$\bar{y}_l = \frac{d-c}{2} y_l + \frac{c+d}{2}$$

其中 s_k、x_k、y_l 及 A_k、A_l 由表1.2确定。

（四）对数高斯积分法

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (1.139)$$

式中 x_k 为积分点，A_k 为积分加权系数，见表1.3。

表1.3　　对数高斯积分用表

n	x_k	A_k
2	0.11200880	0.71853931
	0.60227691	0.28146068
3	0.063890792	0.51340455
	0.3689706	0.39198004
	0.76688030	0.094615406
4	0.04144848	0.38346406
	0.24527491	0.38687532
	0.55616546	0.19043513
	0.84898289	0.0392258
5	0.029134422	0.29789346
	0.17397721	0.34977622
	0.41170251	0.23448829
	0.67731417	0.09893046
	0.89477136	0.01891155

6	0.021634005	0.23876366
	0.12958339	0.30828657
	0.31402045	0.24531742
	0.53865721	0.14200875
	0.75691533	0.05545462
	0.92266884	0.010168958
7	0.01671936	0.19616938
	0.10018568	0.27030264
	0.24629424	0.23968187
	0.43346349	0.16577577
	0.63235098	0.08894323
	0.81111862	0.03319430
	0.94084816	0.005932787
8	0.01332024	0.16441660
	0.07975043	0.23752560
	0.19787102	0.22684498
	0.35415393	0.17575408
	0.52945857	0.11292402
	0.70181452	0.05787221
	0.84937932	0.02097907
	0.95832645	0.00368641
9	0.01086934	0.14006846
	0.06498368	0.20977224
	0.16222943	0.21142716
	0.29374996	0.17715622
	0.44663195	0.1277992
	0.60548172	0.078478879
	0.75411017	0.03902249
	0.87726585	0.0138673
	0.96225056	0.00240804
10	0.009042594	0.12095474
	0.053971054	0.18636310
	0.13531134	0.19566066
	0.24705169	0.17357723
	0.38021171	0.135969593

	0.52379159	0.09364708
	0.66577472	0.05578794
10	0.79419019	0.02715989
	0.89816102	0.00951520
	0.009688477	0.00163816

（五）数值积分法

$$\sum_{i=0}^{z}\int_{\Gamma_m} F(s)d\Gamma = \sum_{i=0}^{z-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} F(s)d\Gamma \qquad (1.140)$$

$$\sum_{i=0}^{z}\int_{\Gamma_m} F(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma$$

$$= \sum_{i=0}^{z-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} F(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma \qquad (1.141)$$

$$\sum_{i=0}^{z}\int_{\Gamma_m} F(P_0,s)[\varphi_{3,e}(s)]d\Gamma$$

$$= \sum_{i=0}^{z-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} F(P_0,s)[\varphi_{3,e}(s)]d\Gamma \qquad (1.142)$$

参 考 文 献

[1]秦荣，样条边界元法，广西力学学会，1980年；广西大学学报，2(1983)。

[2]秦荣，结构力学的样条函数方法，广西人民出版社，1985年。

[3]Qin Rong（秦荣），Fundamentals and Applications of Spline Boundary Element Method，第五届国

际边界元法学术会议论文集，1983年，日本。

［4］N. M. 盖尔芳特，广义函数，科学出版社，1984年。

［5］陈庆益，数学物理方程，人民教育出版社，1979年。

［6］彭晓林，何广乾，广义函数法边界积分方程的建立，应用数学和力学，6（1986）。

［7］南京大学，偏微分方程，科学出版社，1979年。

［8］李岳生，齐东旭，样条函数方法，科学出版社，1979年。

［9］秦荣，B样条函数方法，广西力学学会，1980年。

第二章　建立边界积分方程的方法

边界元法是一种求解偏微分方程的数值方法。这个方法首先将偏微分方程的定解问题化为边界积分方程，然后采用离散方法将边界积分方程化为一个代数方程组来求解。因此，边界元法与边界积分方程有密切关系。

如何建立边界积分方程呢？目前有三种途径：第一种是利用偏微分方程的基本解；第二种是利用偏微分方程的完备解；第三种是利用柯西积分公式。

对于第一种途径，目前常采用下列四种具体方法：（1）格林公式法；（2）功的互等定理法；（3）加权残数法；（4）间接法。还可以利用虚功原理及广义变分原理来建立边界积分方程。

本章主要介绍建立边界积分方程的方法。

§2.1　格林公式法

本节以二维Poisson方程为例。科技中的许多问题可归为求解下列定解问题：

$$\nabla^2 u = b \qquad Q\in\Omega \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \bar{u} \qquad Q\in\Gamma_u \\ q &= \bar{q} \qquad Q\in\Gamma_q \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

式中　$q=\partial u/\partial n$，　$Q=(x,y)$

式（2.1）是poisson方程，式（2.2）是混合边界条件，Ω代表区域，$\Gamma=\Gamma_u+\Gamma_q$代表区域Ω的边界，n是边界Γ的向外法

线，$\bar{u}$及$\bar{q}$分别为边界Γ_u及Γ_q上的已知值（图2.1）。

对于上述定解问题，可以利用第二格林公式把它转化为边界积分方程。这种建立边界积分方程的方法，我们称它为格林公式法。

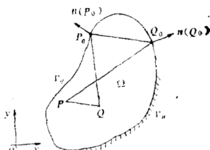


图2.1

（一）第二格林公式

如果u和v在区域（$\Omega+\Gamma$）上连续且一阶连续可微，在区域Ω内二阶连续可微，则利用Gauss—Ostragradshi公式可得第二格林公式：

$$\int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma=\int_{\Omega}\left(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u\right)d\Omega \qquad (2.3)$$

（二）积分方程

设u是一个在区域Ω内满足$\nabla^2 u=b$的函数，v在区域Ω内满足下列方程：

$$\nabla^2 v=-\delta(P) \qquad (2.4)$$

式中$\delta(P)$是Dirac的δ函数。满足式（2.4）的v称为基本解，记为u^*。对于二维问题，由式（2.4）可得：

$$v=u^*=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (2.5)$$

式中$r=\overline{PQ}$。因此，u^*在P点处（$r=0$）有奇异性。

将式（2.1）和式（2.4）代入式（2.3）可得：

$$\int_{\Omega} u(Q)\delta(P,Q)d\Omega(Q)=\int_{\Gamma}[q(Q_0)u^*(P,Q_0)-u(Q_0)q^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0)-\int_{\Omega} b(Q)u^*(P,Q)d\Omega(Q) \quad (2.6)$$

根据δ函数的性质可得：

$$\int_{\Omega} u(Q)\delta(P,Q)d\Omega(Q)=u(P) \quad (2.7)$$

将式（2.7）代入式（2.6）便得下列积分方程：

$$u(P)=\int_{\Gamma}[q(Q_0)u^*(P,Q_0)-u(Q_0)q^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0)+f(P) \quad (2.8)$$

式中 $f(P)=-\int_{\Omega} b(Q)u^*(P,Q_0)d\Omega(Q) \quad (2.9)$

$$q(Q_0)=\frac{\partial u(Q_0)}{\partial n(Q_0)},\ q^*(P,Q_0)=\frac{\partial u^*(P,Q_0)}{\partial n(Q_0)} \quad (2.10)$$

（三）边界积分方程

式（2.8）对区域Ω内任一点都适用。如果边界Γ上的$u(Q_0)$和$q(Q_0)$都是已知的，则利用式（2.8）就可以求出区域Ω内任一点的$u(P)$值。但是，在边界Γ上的$u(Q_0)$及$q(Q_0)$只有一个是已知的，因此必须先求出边界上的未知值。为此，将P点移到边界Γ上，用P_0表示。当$Q_0=P_0$时，因为$u^*(P_0,Q_0)$及$q^*(P_0,Q_0)$有奇异性，因此，P_0是一个奇异点。为了在边界Γ上也能利用式

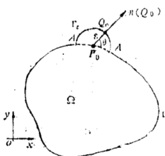


图2.2

(2.8)，我们在边界上的P_0点以ε为半径作一个小圆弧（图2.2），其中ε为任意小的正数（$\varepsilon>0$）。这时，式（2.8）便变为

$$
\begin{aligned}
u(P_0) = & \int_{\Gamma-2\varepsilon} [\, q(Q_0) u^*(P_0, Q_0) \\
& - u(Q_0) q^*(P_0, Q_0) \,] \, d\Gamma(Q_0) \\
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} [\, q(Q_0) u^*(P_0, Q_0) \\
& - u(Q_0) q^*(P_0, Q_0) \,] \, d\Gamma(Q_0) \\
& - \int_{\Omega+G} b(Q) u^*(P, Q) \, d\Omega(Q) \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

式中G是圆弧及边界AP_0A所围成的区域，边界$P_0A=\varepsilon$，当$\varepsilon\to 0$时，$G\to 0$。由积分中值定理可知：

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} q(Q_0) u^*(P_0, Q_0) \, d\Gamma(Q_0) \\
& = q(P_0) \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\Gamma(Q_0) \\
& = \frac{1}{2\pi} q(Q_0) \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\alpha} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) \varepsilon \, d\theta = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} u(Q_0) q^*(P_0, Q_0) \, d\Gamma(Q_0) \\
& = u(P_0) \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(P_0, Q_0) \, d\Gamma(Q_0) \\
& = u(P_0) \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\right) d\Gamma(Q_0) \\
& = u(P_0) \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\right) d\Gamma(Q_0) \\
& = u(P_0) \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(-\frac{1}{2\pi r}\right) d\Gamma(Q_0)
\end{aligned}
$$

$$= u(P_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\alpha}\left(-\frac{1}{2\pi\varepsilon}\right)\varepsilon d\theta = -\frac{\alpha}{2\pi}u(P_0) \qquad (2.12)$$

式中α为Γ_ε的圆心角。$\Gamma_\varepsilon = \alpha\varepsilon$，$d\Gamma(Q_0) = \varepsilon d\theta$。

由上述可知，当$\varepsilon\to 0$时，则式（2.11）可以变为下列形式：

$$C(P_0)u(P_0) = \int_\Gamma [q(Q_0)u^*(P_0, Q_0)$$
$$-u(Q_0)q^*(P_0, Q_0)]d\Gamma(Q_0) + f(P_0) \quad (2.13)$$

这就是式（2.1）及式（2.2）所示定解问题的边界积分方程。式中

$$C(P_0) = 1 - \alpha/2\pi = (2\pi - \alpha)/2\pi = \beta/2\pi \qquad (2.14)$$

图2.3表示边界Γ的曲线在P_0点处有角点。如果边界Γ的曲线在P_0点处是光滑的，则$\beta = \pi$，这时由式（2.14）可知，$C(P_0) = 1/2$。

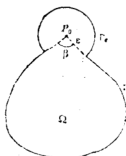


图2.3

由上述可知，$C(P_0)$可以由下列公式确定：

$$C(P_0) = 1 + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(P_0, Q_0)d\Gamma(Q_0) \qquad (2.15)$$

由式（2.15）可知，$C(P_0)$是一个奇性系数。

利用式（2.13）可求出边界未知量$u(Q_0)$和$q(Q_0)$。当$u(Q_0)$和$q(Q_0)$求出后，利用式（2.8）可求出区域Ω内任一点的$u(P)$值。

由上述可知，Poisson方程的边界积分方程，可以写成下列一般形式：

$$C(P)u(P) = \int_\Gamma [q(Q_0)u^*(P, Q)$$

$$-u(Q_0)q^*(P, Q_0)]d\Gamma(Q_0)+f(P) \quad (2.16)$$

式中$C(P)$与P点的位置有关，即

$$C(P)=\begin{cases}1, & P\text{在区域}\Omega\text{内；}\\ 1/2, & P\text{在边界}\Gamma\text{上且为光滑点；}\\ \beta/2\pi, & P\text{在边界}\Gamma\text{上且为角点；}\\ 0, & P\text{在区域}(\Omega+\Gamma)\text{外。}\end{cases}$$

式(2.16)是以二维问题建立起来的，对三维位势问题都适用。对于三维问题，基本解为

$$u^*(P, Q)=\frac{1}{4\pi r} \quad (2.17)$$

格林公式不仅能用来建立位势问题的边界积分方程，而且还可以推广去建立其他问题的边界积分方程，包括广义格林公式法。

§2.2 加权残数法

设定解问题为

$$L(\varphi)=b \qquad Q\in\Omega \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}G(\varphi)&=g \qquad g\in\Gamma_1\\ H(\varphi)&=h \qquad h\in\Gamma_2\end{aligned} \quad (2.19)$$

式中$\varphi=\varphi(Q)$，Q为区域Ω内任一点，即$Q=x=(x_1, x_2, x_3)$；L为偏微分算子，G及H为边界条件算子；b，g及h为已知函数。对于这个定解问题，可以作下列加权残数表达式：

$$\int_\Omega [L(\varphi)-b]Wd\Omega=0 \quad (2.20)$$

式中W为权函数。

利用分部积分法可将式（2.20）化为

$$\int_{\Omega} L^{*}(W)\varphi d\Omega=\int_{\Gamma}[G^{*}(W)H(\varphi)-H^{*}(W)G(\varphi)]d\Gamma$$
$$+\int_{\Omega} bW d\Omega \quad (2.21)$$

式中L^{*}是L的共轭算子。当L为自伴算子时，则$L^{*}=L$，同时$G^{*}=G$，$H^{*}=H$。因此，式（2.21）便变为

$$\int_{\Omega} L(W)\varphi d\Omega=\int_{\Gamma} L'(W,\ \varphi)d\Gamma+\int_{\Omega} bW d\Omega \quad (2.22)$$

式中 $L'(W,\ \varphi)=G(W)H(\varphi)-H(W)G(\varphi)$ （2.23）

如果用式（2.18）的基本解作为权函数，即$W=u^{*}$，则

$$\int_{\Omega} L(u^{*})\varphi d\Omega=\int_{\Gamma} L'(u^{*},\ \varphi)d\Gamma+\int_{\Omega} bu^{*}d\Omega \quad (2.24)$$

式中$L'(u^{*},\ \varphi)$为双线性积分表达式，u^{*}为基本解，满足下列方程

$$L(u^{*})=\delta(P) \quad (2.25)$$

利用式（2.24）可以建立式（2.18）及式（2.19）所示的定解问题的边界积分方程。这种建立边界积分方程的方法，我们称它为加权残数法。

实际上，利用功的互等定理或第二格林公式（广义格林公式）也可以建立式(2.24)所示的恒等式。由此可知，式（2.24）中的双线性积分表达式可由功的互等定理表达式（或第二格林公式，或广义格林公式）的边界积分项确定。具体作法见本书以后各章。本节主要介绍利用式（2.24）来建立边界积分方程的方法。

（一）建立第一个边界积分方程

因为　$L(u^*)=\delta$

$$N_{i,i}=\delta \quad i=1,\ 2,\ 3 \tag{2.26}$$

则　$$L(u^*)=N_{i,i} \tag{2.27}$$

由上述可知：

$$\int_\Omega L(u^*)\varphi d\Omega=\int_\Omega N_{i,i}\varphi d\Omega$$

$$=\int_\Gamma N_i n_i \varphi d\Gamma-\int_\Omega N_i\varphi_{,i}d\Omega \tag{2.28}$$

式中n_i是边界Γ上法向矢量在x_i（$i=1,2,3$）方向的分量。另外

$$\int_{\Omega-G}N_i\varphi_{,i}d\Omega=\int_{\Gamma-\Gamma_G}N_i n_i\varphi d\Gamma-\int_{\Omega-G}N_{i,i}\varphi d\Omega \tag{2.29}$$

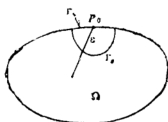


图2.4

式中G是球心在P_0点，半径为ε的小球域，Γ_G是G的边界，且$\Gamma_G=\Gamma_S+\Gamma_\varepsilon$（图2.4），其中$\Gamma_\varepsilon$与$\Omega$相交，则

$$\int_{\Gamma-\Gamma_G}N_i n_i\varphi d\Gamma=\int_{\Gamma-\Gamma_s}N_i\times n_i\varphi d\Gamma-\int_{\Gamma_\varepsilon}N_i n_i\varphi d\Gamma \tag{2.30}$$

因为P_0点不在（$\Omega-G$）内，则

$$\int_{\Omega-G}N_{i,i}\varphi d\Omega=0 \qquad P_0\bar{\in}\Omega-G \tag{2.31}$$

因此　$$\int_{\Omega-G}N_i\varphi_{,i}d\Omega=\int_{\Gamma-\Gamma_s}N_i n_i\varphi d\Gamma-\int_{\Gamma_\varepsilon}N_i n_i\varphi d\Gamma \tag{2.32}$$

当$\varepsilon \to 0$时，$G \to 0$，$\Gamma_\varepsilon \to 0$，因此式（2.32）便变为

$$\int_\Omega N_i \varphi_{,i} d\Omega = \int_\Gamma N_i n_i \varphi d\Gamma - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} N_i n_i \varphi d\Gamma \quad (2.33)$$

将式（2.33）代入式（2.28）便得：

$$\int_\Omega L(u^*) \varphi d\Omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} N_i n_i \varphi d\Gamma \quad (2.34)$$

由第一章式（1.63）可知：

$$\int_\Omega L(u^*) \varphi d\Omega = C(P) \varphi(P) \quad (2.35)$$

将式（2.35）代入式（2.24）便得下列边界积分方程：

$$C(P)\varphi(P) = \int_\Gamma L'(u^*, \varphi) d\Gamma + \int_\Omega u^* b d\Omega \quad (2.36)$$

式中$C(P)$由式（1.69）确定。对于二维问题，则$C(P)$为

$$C(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma \quad (2.37)$$

对于三维问题，则$C(P)$为

$$C(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma \quad (2.38)$$

式中Γ_ε是与Ω相交的边 界 部 分。由式（2.37）或式（2.38）可得：

$$C(P) = \begin{cases} 1 & P \in \Omega \\ \beta/2\pi & P \in \Gamma \\ 0 & P \overline{\in} \Omega + \Gamma \end{cases} \quad (2.39)$$

（二）建立第二个边界积分方程

在有些问题中，只有式（2.36）还不能定解，需要另外建立

一个或几个边界积分方程。为此设

$$(f,\varphi)=\int_{\Omega}L(u^*)\varphi d\Omega \tag{2.40}$$

则 $$(\partial f,\varphi)=\int_{\Omega}L(\partial u^*)\varphi d\Omega \tag{2.41}$$

如果设 $$\overline{\varphi}=\varphi(Q)-\varphi(P) \tag{2.42}$$

则由第一章所述的广义函数理论可知：

$$(\partial f,\ \varphi)=-(f,\ \partial\varphi)=-(f,\ \partial\overline{\varphi})=(\partial f,\ \overline{\varphi}) \tag{2.43}$$

$$(\partial f,\ \overline{\varphi})=\int_{\Omega}L(\partial u^*)\overline{\varphi}d\Omega \tag{2.44}$$

因此由式（2.24）可得：

$$\int_{\Omega}L(\partial u^*)\overline{\varphi}d\Omega=\int_{\Gamma}L'(\partial u^*,\ \overline{\varphi})d\Gamma+\int_{\Omega}b\partial u^*d\Omega \tag{2.45}$$

所以 $$\int_{\Omega}L(\partial u^*)\varphi d\Omega=\int_{\Gamma}L'(\partial u^*,\ \overline{\varphi})d\Gamma+\int_{\Omega}b\partial u^*d\Omega \tag{2.46}$$

将式（2.35）两边在P点对$n(P)$求导数可得：

$$\int_{\Omega}L(\partial u^*)\varphi d\Omega=C(P)\partial\varphi(P) \tag{2.47}$$

将式（2.47）代入式（2.46）可得下列边界积分方程：

$$C(P)\partial\varphi(P)=\int_{\Gamma}L'(\partial u^*,\ \overline{\varphi})d\Gamma+\int_{\Omega}b\partial u^*d\Omega \tag{2.48}$$

式中∂u^*是u^*在P点处对$n(P)$的导数，即

$$\partial u^*=\partial u^*/\partial n(P)$$

$\partial\varphi(P)$是$\varphi(P)$在P点处对$n(P)$的导数，即

$$\partial\varphi(P)=\partial\varphi(P)/\partial n(P)$$

（三）位势问题的边界分积方程

位势问题的定解问题为

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla^2 u = b & \in \Omega \\ u = \bar{u} & \in \Gamma_u \\ q = \bar{q} & \in \Gamma_q\end{array}\right\} \qquad (2.49)$$

由式（2.3）所示的第二格林公式可知：

$$L'(u^*, u) = uq^* - u^*q \qquad (2.50)$$

将式（2.50）代入式（2.36）可得：

$$C(P)u(P) = \int_\Gamma [u(Q_0)q^*(P, Q_0) - q(Q_0)u^*(P,Q)]d\Gamma(Q_0) + \int_\Omega b(Q)u^*(P, Q)d\Omega(Q) \qquad (2.51)$$

式中u^*满足式（2.25）。对于二维问题，u^*采用下列表达式：

$$u^* = \frac{1}{2\pi}\ln r \qquad (2.52)$$

加权残数法应用范围很广，对各种领域都适用。

§2.3 完备解系法

设定解问题为式（2.18）和式（2.19），利用加权残数法可得：

$$\int_\Omega L(W)\varphi d\Omega = \int_\Gamma L'(W, \varphi)d\Gamma + \int_\Omega bWd\Omega \qquad (2.22)$$

如果利用$L(W) = 0$的完备解作为权函数，即$W = w_i$，则式（2.22）便变为下列边界积分方程：

$$\int L'(w_i, \varphi)d\Gamma + \int_\Omega bw_i d\Omega = 0 \tag{2.53}$$

式中w_i是满足下列方程的一个完备解系：

$$L(W) = 0 \tag{2.54}$$

这种建立边界积分方程的方法，我们称它为完备解系法。这个方法不存在奇异积分的问题。

现在以二维位势问题为例。设定解问题为

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta^2 u = b & \in \Omega \\ u = \bar{u} & \in \Gamma_u \\ q = \bar{q} & \in \Gamma_q \end{array}\right\} \tag{2.55}$$

如果$W = w_i$满足下列方程：

$$\nabla^2 W = 0 \tag{2.56}$$

则式（2.55）的边界积分方程为

$$\int (w_i q - q_i u)d\Gamma = \int_\Omega bw_i d\Omega \tag{2.57}$$

式中w_i对应式（2.56）的完备解系。

因为$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$，则上式可变为

$$\int_{\Gamma_u} qw_i d\Gamma - \int_{\Gamma_q} uq_i d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \bar{u}q_i d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{q}w_i d\Gamma + \int_\Omega bw_i d\Omega \tag{2.58}$$

式中　　$q = \partial u/\partial n$，　　$q_i = \partial w_i/\partial n$　　（2.59）

由上述可知，如果w_i是已知的函数，则由式（2.58）可求出边界未知值$u(Q_0)$及$q(Q_0)$。当边界未知值确定后，则区域Ω内任一点P的未知值$u(P)$可以用任一种可行的方法求出来。例如，边界未知值确定后，可以用式（2.8）确定区域Ω内任一点$u(P)$；也可以用下列方法求区域Ω内的$u(P)$值。假

设$u(P)$采用下列多项式

$$u(P)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}a_{ij}x^iy^j \tag{2.60}$$

式中常数a_{ij}由边界条件确定。

由上述可知，完备解系的关键是确定式(2.54)或式(2.56)的完备解系。现在来求式(2.56)的完备系，设$z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$，则式(2.56)可以变为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial \bar{z}}=0 \tag{2.61}$$

它的一般解为

$$W=\varphi(z)+\overline{\varphi(z)} \tag{2.62}$$

式中$\varphi(z)$是解析函数，$\overline{\varphi(z)}$是它的共轭。解析函数$\varphi(z)$的完备解系为

$$1,\ z,\ z^2,\ \cdots,\ z^n,\ \cdots \tag{2.63}$$

式中 $$z^n=(x+iy)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \tag{2.64}$$

由此可知，式(2.56)的完备解系w_i就是式(2.64)的实部和虚部，即

$$w_i=1,x,y,x^2-y^2,2xy,x^3-3xy^2,3x^2y-y^3,\cdots \tag{2.65}$$

或 $$w_i=r^n\cos n\theta,\ r^n\sin n\theta,\ n=1,\ 2,\ \cdots \tag{2.66}$$

其中每一项都是一个基本解w_i（$i=1,\ 2,\ \cdots$）。

在边界元法中，因为这些完备解系w_i在边界积分中是权函数，只起辅助作用。因此对它们只要求完备和相互独立，没有收敛性的要求。所以，这些完备解系对任何几何形状的二维区域都可以用。

这个方法对弹性力学、板壳、塑性力学、流体力学等问题也能用。

§2.4 柯西积分法

设二维位势的定解问题为

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 u = 0 && \in \Omega \\ &u = \bar{u} && \in \Gamma_1 \\ &q = \bar{q} && \in \Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.67}$$

利用复变函数理论中的变换方法可得：

$$\nabla^2 u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \tag{2.68}$$

式中 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

式（2.68）的一般解为

$$u = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} \tag{2.69}$$

式中$\varphi(z)$是解析函数，$\overline{\varphi(z)}$是它的共轭。

利用解析函数的理论可得：

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}dt \\ \overline{\varphi(z)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z}dt \end{aligned}\right\} \quad t \in \Gamma \tag{2.70}$$

式中t是边界Γ上的点，z是域内的任一点。

将式（2.70）代入式（2.69）可得：

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}}{t-z} \qquad t \in \Gamma \tag{2.71}$$

这就是式（2.67）的边界积分方程。这种建立边界积分方程的方法，我们称它为柯西积分法。

若规定u为实函数，则式（2.71）便变为

$$u = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{\varphi(t)+\varphi(\overline{t})}{t-z}dt\right] \tag{2.72}$$

设

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \varphi(t)/2\pi i\\ \varphi_2(t) &= \varphi(t)/2\pi i\end{aligned}\right\} \tag{2.73}$$

则式(2.72)便变为

$$u = \mathrm{Re}\left[\int_{c}\frac{\varphi_1(t)+\varphi_2(t)}{t-z}dt\right] \tag{2.74}$$

如果t用边界曲线的弧坐标s表示，则

$$t = t(s),\quad dt = t'(s)ds \tag{2.75}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \varphi_1[t(s)] = \Psi_1(s)\\ \varphi_2(t) &= \varphi_2[t(s)] = \Psi_2(s)\end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

式中$t'(s)$是$t(s)$对s的导数。

将式(2.75)及式(2.76)代入式(2.74)便得：

$$u = \mathrm{Re}\left[\int_{c}\frac{\Psi_1(s)+\Psi_2(s)}{t(s)-z}t'(s)ds\right] \tag{2.77}$$

又因为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= n\cdot(1+i)\frac{\partial u}{\partial z}+n\cdot(1-i)\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} \tag{2.78}$$

因此

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{Re}\left[n\cdot(1+i)\int_{c}\frac{\Psi_1(s)+\Psi_2(s)}{(t(s)-z)^2}t'(s)ds\right] \tag{2.79}$$

式(2.77)及式(2.79)是两个边界积分方程。由此可知，如果$\Psi_1(s)$及$\Psi_2(s)$已知，则由式(2.77)及式(2.79)即可求出区域内的u及q值。但式中的$\Psi_1(s)$及$\Psi_2(s)$是未知的，可

以用样条函数来逼近，即

$$\Psi_1(s)=[\phi(s)]\{a\},\quad \Psi_2(s)=[\psi(s)]\{b\} \qquad (2.80)$$

式中$\phi_i(s)$及$\psi_i(s)$是由B样条函数构成的基函数。

将式（2.80）代入式（2.77）及式（2.79）可得下列边界积分方程：

$$u(z)=\mathrm{Re}([A]\{a\}+[B]\{b\}) \qquad (2.81)$$

$$q(z)=\mathrm{Re}(n\cdot(1+i)[A']\{a\}+n\cdot(1+i)[B']\{b\}) \qquad (2.82)$$

式中

$$[A]=\int_\Gamma \frac{[\phi(s)]}{t(s)-z}t'(s)ds \qquad (2.83)$$

$$[B]=\int_\Gamma \frac{[\psi(s)]}{t(s)-z}t'(s)ds \qquad (2.85)$$

$$[A']=\int_\Gamma \frac{[\phi(s)]}{(t(s)-z)^2}t'(s)ds \qquad (2.85)$$

$$[B']=\int_\Gamma \frac{[\psi(s)]}{(t(s)-z)^2}t'(s)ds \qquad (2.86)$$

利用边界条件及式（2.81）、式（2.82）可以确定$\{a\}$及$\{b\}$。当$\{a\}$及$\{b\}$确定后，利用式（2.81）及式（2.82）即可求出$u(z)$及$q(z)$值。

这个方法对其他问题也可以推广使用，例如，薄板孔洞应力集中问题，断裂力学问题，地应力问题……

§2.5 间接法

边界积分方程解法有直接法及间接法。前几节介绍的都是直接法的边界积分方程，边界未知量都是真实的物理量，本节利用直

接法建立间接法的边界积分方程，边界未知量都是虚拟量。

考虑一个各向同性的弹性体Ω，它由一个光滑的闭边界Γ包围（图2.5）。它的平衡方程及边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_{ij,j}+b_i=0 & \in\Omega \\ u_i=\bar{u}_i & \in\Gamma_u \\ p_i=\bar{p}_i & \in\Gamma_p \end{array}\right\} \quad i,\ j=1,2,3 \qquad (2.87)$$

利用加权残数法可得式（2.87）所示定解问题的边界积分方程：

$$u_k(P)=\int_\Gamma [u^*_{kl}(P,\ Q_0)\,p_l(Q)-p^*_{kl}(P,\ Q_0)u_l(Q_0)d\Gamma$$

$$+\int_\Omega u^*_l(P,\ Q)\,b_l(Q)\,d\Omega,\ l,\ l=1,\ 2,\ 3$$

$$P\in\Omega \qquad (2.88)$$

式中b_l为体力分量，u_k为位移分量，p_l为面力分量，u^*_{kl}及p^*_{kl}为开尔文基本解，见本书第四章。

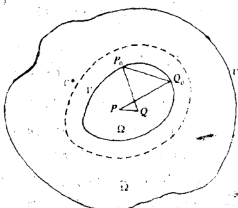


图2.5

现在设想上述弹性体Ω是无限大弹性体的一部分，而且在Γ上的条件不变（图2.5），处于区域Ω之外的区域为$\tilde{\Omega}$。假设在区域$\tilde{\Omega}$内的体力为零，则平衡方程为

$$\sigma_{ij,j}=0 \quad \in\tilde{\Omega} \qquad (2.89)$$

利用加权残数法可得：

$$\int_{\Gamma}[u_{kl}^{*}(P, Q_0)\tilde{p}_l(Q_0) - p_{kl}^{*}(P, Q_0)\tilde{u}_l(Q_0)]d\Gamma$$

$$= 0 \qquad \in \tilde{\Omega} \qquad (2.90)$$

如果规定$\tilde{u}_l$为区域$\tilde{\Omega}$中的解，则

$$\tilde{u}_l(Q_0) = u_l(Q_0) \qquad \text{on } \Gamma \qquad (2.91)$$

将式（2.88）减去式（2.90）可得：

$$u_k(P) = \int_{\Gamma} u_{kl}^{*}(P, Q_0)[p_l(Q_0) - \tilde{p}_l(Q_0)]d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega} u_{kl}^{*}(P, Q)b_l(Q)d\Omega \qquad (2.92)$$

设 $\Psi_l(Q_0) = p_l(Q_0) - \tilde{p}_l(Q_0)$ （2.93）

则式（2.92）便变为

$$u_k(P) = \int_{\Gamma} u_{kl}^{*}(P, Q_0)\Psi_l(Q_0)d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega} u_{kl}^{*}(P, Q)b_l(Q)d\Omega \qquad (2.94)$$

当$P \to P_0$时，则边界上的积分方程为

$$u_k(P_0) = \int_{\Gamma} u_{kl}^{*}(P_0, Q_0)\Psi_l(Q_0)d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega} u_{kl}^{*}(P_0, Q)b_l(Q)d\Omega \qquad (2.95)$$

利用面力与位移的关系及式（2.95）可得：

$$p_k(P_0) = \frac{1}{2}\Psi_k(P_0) + \int_{\Gamma} p_{kl}^{*}(P_0, Q_0)\Psi_l(Q_0)d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega} u_{kl}^{*}(P_0, Q)b_l(Q)d\Omega \qquad (2.96)$$

式中$\Psi_k(Q_0)$称为边界上的虚拟力。

由此可知，当边界Γ上的$u_k(P_0)$及$p_k(P_0)$为已知时，利用式(2.95)及式(2.96)可以确定边界上的虚拟力$\Psi_k(Q_0)$。将$\Psi_k(Q_0)$代入式(2.94)可得域Ω内任一点的位移，然后利用应力与位移的关系，可求出域Ω内任一点的应力及边界Γ上的面力。上述这种方法称为边界积分方程间接法，式(2.95)及式(2.96)为间接法的边界积分方程。

如果在区域Ω边界Γ外附近周围作一个闭界虚边界Γ^*(图2.5)，且设虚拟力作用在虚边界Γ^*，这样可以避免奇异积分。

§2.6 区域积分的处理方法

由上述可知，在边界积分方程中含有下列类型的区域积分：

$$f=\int_\Omega q(Q)\,w^*(P,Q)\,d\Omega \quad Q\in\Omega \tag{2.97}$$

对这类区域积分的处理可以采用下列几种方法：

(一)将微分方程化为齐次方程

设

$$\left.\begin{aligned} &L(u)=b &&\in\Omega\\ &u=\bar{u} &&\in\Gamma_1\\ &p=\bar{p} &&\in\Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.98}$$

它的解为 $u=u_0+u'$ (2.99)

将式(2.99)代入式(2.98)便得

$$L(u_0)+L(u')=b \tag{2.100}$$

如果令 $L(u_0)=b \quad \in\Omega$ (2.101)

则

$$\left.\begin{aligned} &L(u')=0 &&\in\Omega\\ &u'=\bar{u}-u_0 &&\in\Gamma_1\\ &p'=\bar{p}-p_0 &&\in\Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.102}$$

式中u_0——特解，它由式（2.101）确定。式（2.102）的边界积分方程中无区域积分。

（二）将区域积分化为边界积分

1．第一种方法

设

$$\nabla^2 q = 0 \qquad \in \Omega \tag{2.103}$$

$$\nabla^2 F = w^* \qquad \in \Omega \tag{2.104}$$

则利用第二格林公式可将式（2.97）化为边界积分：

$$f = \int_\Gamma (q\partial F/\partial n - F\partial q/\partial n)\, d\Gamma \tag{2.105}$$

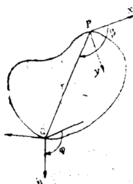


图2.6

2．第二种方法

如果设

$$\partial F/\partial x = qw^* \tag{2.106}$$

则

$$f = \int_\Gamma F\cos(n,\ x)\, d\Gamma \tag{2.107}$$

如果设

$$\partial(rF)/\partial r = qw^* r \tag{2.108}$$

则

$$f = \int_\Gamma F\cos(\beta - \varphi)\, d\Gamma \tag{2.109}$$

式中r、φ及β见图2.6。

3．第三种方法

利用伽辽金张量法将区域积分化为边界积分，见第六章。

（三）半解析半离散法

本节以二维问题为例。

1．直角坐标系（图2·7）

$$\int_{\Omega} F(P,Q)\,d\Omega = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(P,Q)\,dy\right)dx \quad (2.110a)$$

或 $$\int_{\Omega} F(P,Q)\,d\Omega = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} F(P,Q)\,dx\right)dy \quad (2.110b)$$

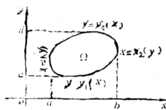


图2.7

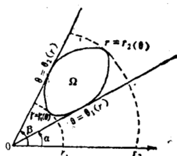


图2.8

2. 极坐标系（图2·8）

$$\int_{\Omega} F(P,Q)\,d\Omega = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} F(P,Q)\,r\,dr\right)d\theta \quad (2.111a)$$

或 $$\int_{\Omega} F(P,Q)\,d\Omega = \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} F(P,Q)\,d\theta\right)r\,dr \quad (2.111b)$$

由上述可知，对区域积分可采用下列办法处理：先沿一个轴方向进行解析的积分，然后沿另一个轴方向进行数值积分，其中选择最方便的方向作解析积分。这个方法也可推广到三维问题中去。

（四）对整个区域积分进行数值积分

对区域积分也可以按下列办法处理：先将区域分为若干单元，其次将区域积分离散化，即

$$f = \sum_{e=1}^{N} \int_{\Omega e} F(P,\ Q)\,d\Omega \quad (2.112)$$

然后利用高斯求积公式进行计算。

上述介绍了几种处理区域积分的方法，可以根据不同的具体情况灵活应用。

参 考 文 献

[1]秦荣，建立边界积分方程的方法，广西大学，1984年。

[2]C.A.Brebbia,The Boundary Element Method for Engineers,pentech press,England,1978。

[3]杜庆华，姚振汉，弹性力学边界积分方程——边界元法的基本理论及若干工程应用，清华大学，1981年。

[4]何广乾，彭晓林，偏微分方程完备解与边界元法，第一届全国工程中的边界元法会议论文集，1985年。

[5]唐立民，金吾根，边界元法的基本问题和一个新途径，计算结构力学及其应用，3（1986）。

[6]秦荣，板壳振动的样条边界元法，第一届全国工程中的边界元法会议论文集，1985年。

[7]Qin Rong（秦荣），Spline Boundary Element Method for Shallow Shells,第六届国际边界元法会议论文集，1984年，英国。

第三章　位势问题的样条边界元法

在工程中，许多问题可归结为求解 Laplace 方程或 Poisson 方程的问题。例如，动水压力、弹性杆件的扭转、薄膜平衡、稳定热传导、稳定渗流、电磁场等问题，都会遇到求解Laplace方程或Poisson方程的问题。由于Laplace 方程及 Poisson 方程统称位势方程，故上述问题称为位势问题。因此，研究位势问题的有效计算方法是一个有实用意义的课题。

本章主要介绍位势问题的样条边界元法[1]。这个方法与普通边界元法相比，具有下列优点：程序简单，内存少，容易在微机上实现，而且计算时间少，是一种经济有效的方法。

§3.1　边界积分方程

位势问题可以归结为下列定解问题：

$$\nabla^2 u = b \qquad Q \in \Omega \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \overline{u} \qquad Q \in \Gamma_u \\ q &= \overline{q} \qquad Q \in \Gamma_q \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

式中　$q = \partial u / \partial n \qquad \Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$

式（3.1）是 Poisson 方程，式（3.2）是边界条件。现在设

$$u = u^0 + u' \tag{3.3}$$

式中u^0为式（3.1）的特解。

将式（3.3）代入式（3.1）便得

$$\nabla^2 (u^0 + u') = b \tag{3.4}$$

即 $\nabla^2 u' + \nabla^2 u^0 - b = 0$ (3.5)

如果 $\nabla^2 u^0 - b = 0$ (3.6)

则 $\nabla^2 u' = 0 \qquad Q \in \Omega$ (3.7)

由式(3.2)可知：

$$\left.\begin{aligned} u' &= \overline{u} - u^0 \qquad Q \in \Gamma u \\ q' &= \overline{q} - q^0 \qquad Q \in \Gamma_q \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

式中 $q^0 = \partial u^0 / \partial n$

利用第二章建立边界积分方程的方法，可以将式(3.7)及式(3.8)化为下列边界积分方程：

$$C(P)[u(P) - u^0(P)] = \int_\Gamma [q(Q_0) - q^0(Q_0)] u^*(P, Q_0) d\Gamma(Q_0) - \int_\Gamma [u(Q_0) - u^0(Q_0)] q^*(P, Q_0) d\Gamma(Q_0) \tag{3.9}$$

$$C(P)u(P) = \int_\Gamma [q(Q_0) u^*(P, Q_0) - u(Q_0) q^*(P, Q_0)] d\Gamma(Q_0) + f(P) \tag{3.10}$$

式中 $f(P) = C(P)u^0(P) - \int_\Gamma [q^0(Q_0) u^*(P, Q_0) - u^0(Q_0) q^*(P, Q_0)]$ (3.11)

对式(3.10)两边求导数可得：

$$q(P) = \int_\Gamma [q(Q_0) u_1^*(P, Q_0) - u(Q_0) q_1^*(P, Q_0)] d\Gamma(Q_0) + f_1(P) \tag{3.12}$$

式中

$$f_1(P)=q^0(P)-\int_{\Gamma}[\,q^0(Q_0)u_1^*(P,Q_0)$$

$$-u^0(Q_0)q_1^*(P,Q_0)\,]\,d\Gamma(Q_0) \tag{3.13}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1^*(P,Q_0)&=\partial u^*(P,Q_0)/\partial n(P)\\ q_1^*(P,Q_0)&=\partial q^*(P,Q_0)/\partial n(P)\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

$$\left.\begin{aligned} &u^*(P,Q_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{二维问题})\\ \text{或}\quad &u^*(P,Q_0)=\frac{1}{4\pi r} \quad (\text{三维问题})\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

式（3.10）也可以写成下列形式：

$$C(P)u(P)+\int_{\Gamma_u}\overline{u}(Q_0)q^*(P,Q_0)d\Gamma(Q_0)$$

$$+\int_{\Gamma_q}u(Q_0)q^*(P,Q_0)d\Gamma(Q_0)$$

$$=\int_{\Gamma_u}q(Q_0)u^*(P,Q_0)d\Gamma(Q_0)$$

$$+\int_{\Gamma_q}\overline{q}(Q_0)u^*(P,Q_0)d\Gamma(Q_0)+f(P) \tag{3.16}$$

式中P、Q_0及n如图3.1所示，$r=\overline{PQ_0}$。

$$C(p)=\begin{cases}1 & P\in\Omega\\ \dfrac{1}{2} & P\in\Gamma\text{且为光滑点}\\ \beta/2\pi & P\in\Gamma\text{且角点，}\beta\text{为}P\text{点的内角}\\ 0 & P\overline{\in}(\Omega+\Gamma)\end{cases}$$

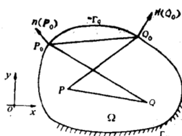


图3.1

如果P在边界Γ上或在区域（$\Omega+\Gamma$）外，则利用式(3.10)或式（3.16）可求出边界未知量$u(Q_0)$及$q(Q_0)$。当边界未知量确定后，利用式（3.10）及式（3.12）可求出区域Ω内任一点的未知值$u(P)$及$q(P)$。

由于边界积分方程的精确求解是很困难的，因此只得采用数值计算方法求解边界积分方程。本书采用样条边界元法。

§3.2 三次样条边界元法

本节以二维问题为例（图3.2）。如果将边界曲线分为M个区域，则式（3.10）可以变为

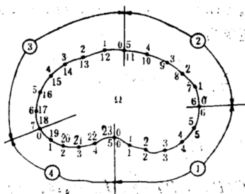


图3.2

$$C(P_0)u(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_m(P_0,s)+f(P_0) \qquad (3.17)$$

式中 $\Pi_m(P_0,s)=\int_{\Gamma_m}[\,q(s)u^*(P_0,s)-u(s)q^*(P_0,s)\,]\,d\Gamma(s)$ （3.18）

$$f(P_0)=C(P_0)u^0(P_0)$$
$$-\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m}[\,q^0(s)u^*(P_0,s)-u^0(s)q^*(P_0,s)\,]\,d\Gamma(s) \tag{3.19}$$

其中 s 是边界曲线的弧坐标（$s_i=Q_0$）。

在图3.2中，边界被分为４个区域，其编号为①，②，③，④；每个区域又分若干等分，结点编号为０，１，２，…，N_m，写在边界外边；整个边界结点的编号为０，1，2，…，N，写在边界内边。今后设$j=0,1,2,\cdots,N$为整个边界的结点编号。下面介绍几种具体做法，供大家参考。

（一）第一种方法

如果将每个区域分为N_m个等分：

$$s_0<s_1<s_2<\cdots<s_z,\quad z=N_m$$
$$s_i=s_0+ih_m,\quad h_m=s_{i+1}-s_i=l_m/N_m$$

则式（3.18）便变为

$$\Pi_m(P_0,s_i)=\sum_{i=0}^{Z}\lambda_i[u^*(P_0,s_i)q(s_i)-q^*(P_0,s_i)u(s_i)]h_m \tag{3.20}$$

因此由式（3.17）可得：

$$R(P_0)=C(P_0)u(P)-\sum_{m=1}^{M}\Pi_m(P_0,s_i)-f(P_0) \tag{3.21}$$

式中$R(P_0)$是边界残数。

将式（3.20）代入式（3.21）便得：

$$\{R\}=[C]\{u\}=\sum_{m=1}^{M}([\widetilde{H}]_m\{u\}_m-[K]_m\{q\}_m)-\{f\} \quad (3.22)$$

式中 $\{u\}=[\ u_0\ \ u_1\ \ u_2\ \cdots\ u_N\ ]^T$

$\{u\}_m=[\ u_0\ \ u_1\ \ u_2\ \cdots\ u_Z\ ]^T$

$\{q\}_m=[\ q_0\ \ q_1\ \ q_2\ \cdots\ q_Z\ ]^T$

$u_i=u(s_i) \qquad q_i=q(s_i)$

$$[\widetilde{H}]_m=h_m[q^*]_m[\lambda]_m \quad (3.23)$$

$$[K]_m=h_m[u^*]_m[\lambda]_m \quad (3.24)$$

$$[\lambda]_m=\mathrm{diag}(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_Z) \quad (3.25)$$

$$\left.\begin{aligned}[u^*]_m&=[\ u^*(s_j,s_i)\ ]\\ [q^*]_m&=[\ q^*(s_j,s_i)\ ]\end{aligned}\right\}\begin{aligned}i&=0,1,2,\cdots,N_m\\ j&=0,1,2,\cdots,N\end{aligned} \quad (3.26)$$

$$[C]=\mathrm{diag}(C_0,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_N) \quad (3.27)$$

$$C_j=C(s_j) \qquad j=0,1,2,\cdots,N$$

其中 λ_i 与数值积分法的求积公式有关。例如，对于梯形求积公式，λ_i 用下列公式决定：

$$\lambda_i=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & i=0\ ,\ N_m\\ 1 & i=0,1,2,\cdots,N_m-1\end{cases} \quad (3.28)$$

对辛普生求积公式，λ_i 用下列公式决定：

$$\lambda_i=\begin{cases}1/3 & i=0\ ,\ N_m\\ 4/3 & i=1,3,\cdots,N_m-1\\ 2/3 & i=2,4,\cdots,N_m-2\end{cases} \quad (3.29)$$

式（3.29）中的 N_m 为偶数。

$F^*(s_j,s_i)$ 的值可以用配点法确定，也可用下列积分式确定：

$$F^*(s_j,s_i)=\frac{1}{h_m}\int_{s_i-h_m/2}^{s_i+h_m/2}F^*(s_j,s)d\Gamma(s) \quad (3.30)$$

式中 $F^*=u^*,\ q^*$。如果 F^* 为奇异函数，则 $F^*(s_i,s_i)$ 采用下

列积分式确定：

$$F^*(s_i,s_i)=\frac{1}{h_m}\lim_{P\to S_i}\int_{s_i-h_m/2}^{s_i+h_m/2}F^*(P,s)d\Gamma(s) \tag{3.31}$$

式（3.30）及式(3.31)可以用高斯求积公式计算。由式（3.22）可得：

$$\{R\}=\sum_{m=1}^{M}[H]_m\{u\}_m-\sum_{m=1}^{M}[K]_m\{q\}_m-\{f\} \tag{3.32}$$

式中 $$\{f\}=\sum_{m=1}^{M}([H]_m\{u^0\}_m-[K]_m\{q^0\}_m) \tag{3.33}$$

$$[H]_m=[C]_m^B+[\widetilde{H}]_m \tag{3.34}$$

$$[C]_m=\text{diag}(\alpha C_0,C_1,C_2,\cdots,\beta C_z) \tag{3.35}$$

其中 $[C]_m^B$ 为 $[C]_m$ 扩大的 $(N+1)(N_m+1)$ 的矩阵。在式(3.35)中，当 $m=1$ 时，$\alpha=1$，$\beta=\frac{1}{2}$；当 $m=M$ 时，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=1$，当 $1<m<M$ 时，$\alpha=\beta=\frac{1}{2}$，$z=N_m$。

式（3.32）及式（3.33）可以写成下列形式：

$$\{R\}=[H]\{u\}-[K]\{q\}-\{f\} \tag{3.36}$$

式中 $$\{f\}=[H]\{u^0\}-[K]\{q^0\} \tag{3.37}$$

$$[H]=\sum_{m=1}^{M}[H]_m^A \tag{3.83}$$

$$[K]=\sum_{m=1}^{M}[K]_m^A \tag{3.39}$$

$$[H]_m^A=[C]_m^A+[\widetilde{H}]_m^A \tag{3.40}$$

$$\{u^0\} = [\ u_0^0\ \ u_1^0\ \ u_2^0\ \cdots\ u_N^0\ ]^T$$

$$\{q^0\} = [\ q_0^0\ \ q_1^0\ \ q_2^0\ \cdots\ q_N^0\ ]^T$$

$$\{q\} = [\ q_0\ \ q_1\ \ q_2\ \cdots\ q_N\ ]^T$$

这里$[H]_m^A$，$[K]_m^A$，$[\widetilde{H}]_m^A$及$[C]_m^A$分别$[H]_m$，$[K]_m$，$[\widetilde{H}]_m$及$[C]_m$扩大的（$N+1$）阶矩阵。

式（3.32）及式（3.36）与边界条件有关，为了求定解，计算时必须在式（3.32）或式（3.36）中引入边界条件。

如果在整边界Γ上q是已知的，则式（3.36）便变为

$$\{R\} = [H]\{u\} - [K]\{\overline{q}\} - \{f\} \tag{3.41}$$

利用配点法可得：

$$[H]\{u\} = \{F\} \tag{3.42}$$

式中 $$\{F\} = [K]\{\overline{q}\} + \{f\} \tag{3.43}$$

利用式（3.42）可求出边界未知量$\{u\}$。如果在整个边界Γ上u是已知的，则式（3.36）便变为

$$\{R\} = [H]\{\overline{u}\} - [K]\{q\} - \{f\} \tag{3.44}$$

利用配点法可得：

$$[K]\{q\} = \{F\} \tag{3.45}$$

式中 $$\{F\} = [H]\{\overline{u}\} - \{f\} \tag{3.46}$$

$$\{\overline{u}\} = [\overline{u}_0\ \ \overline{u}_1\ \ \overline{u}_2\ \cdots\ \overline{u}_N]^T$$

利用式（3.45）可求出边界未知量$\{q\}$。图3.3是一个混合边界问题，如果将它的边界分为4个区域，每个边界区域又分为若干等分，则式（3.36）便变为

$$\{R\} = [H]_1\{u\}_1 - [K]_2\{q\}_2 + [H]_3\{u\}_3 - [K]_4\{q\}_4$$
$$- ([K]_1\{\overline{q}\}_1 - [H]_2\{\overline{u}\}_2 + [K]_3\{\overline{q}\}_3 - [H]_4\{\overline{u}\}_4) - \{f\}$$

利用配点法可得：

$$[A]\{X\}=\{F\} \tag{3.48}$$

式中 $\{X\}=[\{u\}_1^T\ \{q\}_2^T\ \{u\}_3^T\ \{q\}_4^T]^T$

$$[A]=[[H]_1\ -[K]_2\ [H]_3\ -[K]_4]$$

$$\{F\}=[K]_1\{\overline{q}\}_1-[H]_2\{\overline{u}\}_2+[K]_3\{\overline{q}\}_3-[H]_4\{\overline{u}\}_4+\{f\} \tag{3.49}$$

利用式（3.48）可求出混合边界问题的边界未知量。

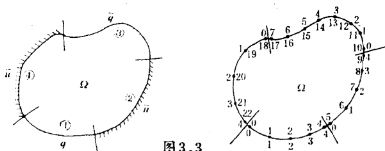


图3.3

对于混合边界问题，为了分离边界未知量和边界已知量，可以在两个区域分界处布置两个彼此十分接近的点（图3.3），这两点属于不同的区域。在混合边界问题中，$[C]_m$中的α及β，不论m为何值，都等于1（因为不存在参数搭接问题）。对于有角点的边界，为了避免角点问题，可以在角点左右布置两个彼此十分接近的点（图3.4），这时$\alpha=\beta=1$。

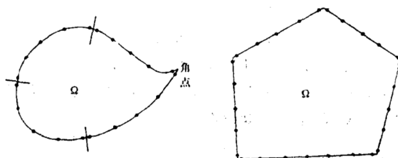


图3.4

由上述可知，式（3.48）包含式（3.42）及式（3.45）。利用式(3.48)求出边界未知量后，即可利用式(3.10)及式（3.12）的离散格式求出区域 Ω 内任一点的 $u(p)$ 及 $q(p)$ 值：

$$u(p)=\sum_{m=1}^{M}\left([u^*(P)]_m[\lambda]_m\{q\}_m - [q^*(P)]_m[\lambda]_m\{u\}_m\right)h_m+f(P) \quad (3.50)$$

$$q(P)=\sum_{m=1}^{M}\left([u_1^*(P)]_m[\lambda]_m\{q\}_m - [q_1^*(P)]_m[\lambda]_m\{u\}_m\right)h_m+f_1(P) \quad (3.51)$$

式中

$$f(P)=u^0(P)-\sum_{m=1}^{M}\left([u^*(P)]_m[\lambda]_m\{q^0\}_m - [q^*(P)]_m[\lambda]_m\{u^0\}_m\right)h_m \quad (3.52)$$

$$f_1(P)=q^0(P)-\sum_{m=1}^{M}\left([u_1^*(P)]_m[\lambda]_m\{q^0\}_m - [q_1^*(P)]_m[\lambda]_m\{u^0\}_m\right)h_m \quad (3.53)$$

其中 $[F^*(P)]_m=[F^*(P,s_0)\quad F^*(P,s_1)\quad\cdots\quad F^*(P,s_z)]_m$

（二）第二种方法

如果将边界 Γ_m 分为 N_m 等分，则利用第一章式（1.105）可将式（3.18）及式（3.19）的边界积分化为下列形式：

$$\int_{\Gamma_m} q^*(P_0,s)u(s)d\Gamma=\sum_{i=0}^{Z}\lambda_i q^*(P_0,s_i)u(s_i)h_m + \frac{h_m^2}{12}[q^*(P_0,s_0)u'(s_0)-q^*(P_0,s_z))u'(s_z)] \quad (3.54)$$

$$\int_{\Gamma_m} u^*(P_0,s)q(s)d\Gamma=\sum_{i=1}^{z}\lambda_i u^*(P_0,s_i)q(s_i)h_m$$

$$+\frac{h_m^2}{12}[u^*(P_0,s_0)q'(s_0)-u^*(P_0,s_z)q'(s_z)] \quad (3.55)$$

式中 $z=N_m$.

将式（3.54）及式（3.55）代入式（3.18）及式（3.19）可得：

$$\Pi_m(P_0,s)=\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[u^*(P_0,s_i)q(s_i)-q^*(P_0,s_i)u(s_i)]h_m$$
$$+\frac{h_m^2}{12}[u^*(P_0,s_0)q'(s_0)-u^*(P_0,s_z)q'(s_z)$$
$$-q^*(P_0,s_0)u'(s_0)+q^*(P_0,s_z)u'(s_z)] \quad (3.56)$$

$$f(P_0)=C(P_0)u^0(P_0)-\sum_{m=1}^{M}\Bigg(\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[u^*(P_0,s_i)q^0(s_i)$$
$$-q^*(P_0,s_i)u^0(s_i)]h_m+\frac{h_m^2}{12}[u^*(P_0,s_0)q^{0\prime}(s_0)$$
$$-u^*(P_0,s_z)q^{0\prime}(s_z)-q^*(P_0,s_0)u^{0\prime}(s_0)$$
$$+q^*(P_0,s_z)u^{0\prime}(s_z)]\Bigg) \quad (3.57)$$

式中 $\quad u^{0\prime}=\partial u^0/\partial s \qquad q^{0\prime}=\partial q^0/\partial s \quad (3.58)$

将式（3.56）代入式（3.17）便得：

$$\{R\}=[C]\{u\}+\sum_{m=1}^{M}[([\widetilde{H}]_m\{u\}_m-[K]_m\{q\}_m)$$
$$+([H_0]_m\{u'\}_m-[K_0]_m\{q'\}_m)]-\{f\} \quad (3.59)$$

式中 $\quad \{u'\}_m=[u_0' \quad u_1' \quad u_2' \quad \cdots \quad u_z']_m^T$

$$\{q'\}_m=[q_0' \quad q_1' \quad q_2' \quad \cdots \quad q_z']_m^T$$

$$\left.\begin{aligned}[H_0]_m&=h_m[q_0^*(s_j,s_i)]_m[\lambda]_m\\ [K_0]_m&=h_m[u_0^*(s_j,s_i)]_m[\lambda]_m\end{aligned}\right\} i=0,z \quad (3.60)$$

$$[u_0^*(s_j,s_i)]_m =$$

$$= \frac{h_m}{6} \begin{bmatrix} u^*(s_0,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & -u^*(s_0,s_z) \\ u^*(s_1,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & -u^*(s_1,s_z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u^*(s_N,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & -u^*(s_N,s_z) \end{bmatrix}_{(N+1)(z+1)} \quad (3.61)$$

$$[q_0^*(s_j,s_i)]_m =$$

$$= \frac{h_m}{6} \begin{bmatrix} q^*(s_0,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & -q^*(s_0,s_z) \\ q^*(s_1,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & -q^*(s_1,s_z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q^*(s_N,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & -q^*(s_N,s_z) \end{bmatrix}_{(N+1)(z+1)} \quad (3.62)$$

由上述可知，当 $u' = q' = 0$ 时，式（3.56）可变为式（3.22）。

如果边界未知量 $u(s)$ 及 $q(s)$ 采用三次B样条函数来逼近，则

$$\left.\begin{aligned} u(s) &= [\phi(s)]\{a\}_m \qquad q(s) = [\phi(s)]\{b\}_m \\ u'(s) &= [\phi'(s)]\{a\}_m \qquad q'(s) = [\phi'(s)]\{b\}_m \end{aligned}\right\} \quad (3.63)$$

式中 $\{a\}_m = [u_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{z-1} \quad u_z]_m^T$

$$\{b\}_m = [q_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{z-1} \quad q_z]_m^T$$

$$[\phi(s)] = [\varphi_{3k}(s)][Q]_m \qquad k = -1,0,1,2,\cdots,z+1 \quad (3.64)$$

$$[Q]_m = \mathrm{diag}([g],[I],[h]) \quad (3.65)$$

其中 $[I]$ 为 $(z-1)(z-1)$ 的单位矩阵，$[g]$ 及 $[h]$ 由第一章式（1.21）确定．φ_{3k} 为三次B样条函数，即

$$\varphi_{3k}(s) = \varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h_m} - k\right) \qquad k = -1,0,1,2,\cdots,z+1 \quad (3.66)$$

由式（3.63）可得：

$$\left.\begin{array}{ll}\{u\}_m=[N]_m\{a\}_m & \{q\}_m=[N]_m\{b\}_m \\ \{u'\}_m=[N']_m\{a\}_m & \{q'\}_m=[N']_m\{b\}_m\end{array}\right\} \quad (3.67)$$

式中 $$[N]_m=[B]_m[Q]_m \qquad [N']_m=[B']_m[Q]_m \quad (3.68)$$

$$[B]_m=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{(s+1)(s+3)} \quad (3.69)$$

$$[B']_m=\frac{1}{2h_m}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & -1 & 0 & 1 & \\ & & & & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(s+1)(s+3)} \quad (3.70)$$

式（3.59）与边界条件有关。如果整个边界 Γ 上 $q(s)$ 是已知的，则式（3.59）便变为

$$\{q\}=\sum_{m=1}^{M}([H]_m\{u\}_m+[H_0]_m\{u'\}_m-\{F\} \quad (3.71)$$

式中 $$\{F\}=\sum_{m=1}^{M}([K]_m\{\overline{q}\}_m+[K_0]_m\{\overline{q'}\}_m)+\{f\} \quad (3.72)$$

将式（3.67）代入式（3.71）可得：

$$\{R\}=[A]\{a\}-\{F\} \quad (3.73)$$

式中 $$[A]=\sum_{m=1}^{M}[A]_m^{\wedge} \quad (3.74)$$

$$\{a\}=\sum_{m=1}^{M}\{a\}_m^{\wedge} \quad (3.75)$$

$$[A]_m=[H]_m[N]_m+[H_0]_m[N']_m \tag{3.76}$$

其中 $\{a\}_m^{\wedge}$ 为 $\{a\}_m$ 扩大的（$N+1$）维向量，$[A]_m^{\wedge}$ 为 $[A]_m$ 扩大的（$N+1$）阶矩阵.

利用配点法可得：

$$[A]\{a\}=\{F\} \tag{3.77}$$

利用式（3.77）求出$\{a\}$后，即可利用式（3.67）确定边界未知量。

如果在整个边界上$u(s)$为已知，则式（3.59）便变为

$$\{R\}=\sum_{m=1}^{M}\left([K]_m\{q\}_m+[K_0]_m\{q'\}_m\right)-\{f\} \tag{3.78}$$

式中 $$\{F\}=[C]\{u\}+\sum_{m=1}^{M}\left([\widetilde{H}]_m\{\widetilde{u}\}+[H_0]_m\{\widetilde{u'}\}_m\right)-\{f\} \tag{3.79}$$

将式（3.67）代入式（3.79）可得：

$$\{R\}=[A]\{b\}-\{F\} \tag{3.80}$$

式中 $$\{b\}=\sum_{m=1}^{M}\{b\}_m^{\wedge} \tag{3.81}$$

$$[A]=\sum_{m=1}^{M}[A]_m^{\wedge}+[C][N] \tag{3.82}$$

$$[A]_m=[K]_m[N]_m+[K_0]_m[N']_m \tag{3.83}$$

$$[C]=\mathrm{diag}(C_0,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_N) \tag{3.84}$$

$$[N]=[B][Q] \tag{3.85}$$

其中$[Q]$由第一章式（1.20）确定，$[B]$由式（1.22）确定；$\{b\}_m^{\wedge}$为$\{b\}_m$扩大的（$N+1$）维向量。

利用配点法可得：

$$[A]\{b\}=\{F\} \tag{3.86}$$

利用式（3.86）求出$\{b\}$后，即可利用式（3.67）确定边界未知量。

如果考虑混合边界问题（图3.3），则式（3.59）可变为

$$\{R\} = ([H]_1\{u\}_1 + [H_0]_1\{u'\}_1) - ([K]_2\{q\}_2 + [K_0]_2\{q'\}_2) + ([H]_3\{u\}_3 + [H_0]_3\{u'\}_3) - ([K]_4\{q\}_4 + [K_0]_4\{q'\}_4) - \{F\} \quad (3.87)$$

式中

$$\{F\} = ([K]_1\{\bar{q}\}_1 + [K_0]_1\{\bar{q}'\}_1 - ([H]_2\{\bar{u}\}_2 + [H_0]_2\{\bar{u}'\}_2) + ([K]_3\{\bar{q}\}_3 + [K_0]_3\{\bar{q}'\}_3) - ([H]_4\{\bar{u}\}_4 + [H_0]_4\{\bar{u}'\}_4) + \{f\} \quad (3.88)$$

将式（3.67）代入式（3.87）便得：

$$\{R\} = [A]\{X\} - \{F\} \quad (3.89)$$

式中

$$\{X\} = [\{a\}_1^T \quad \{b\}_2^T \quad \{a\}_3^T \quad \{b\}_4^T]^T$$

$$[A] = [[A]_1 \quad [A]_2 \quad [A]_3 \quad [A]_4] \quad (3.90)$$

$$\left.\begin{aligned} [A]_m &= [H]_m[N]_m + [H_0]_m[N']_m \quad m = 1, 3 \\ [A]_m &= -[K]_m[N]_m - [K_0]_m[N']_m \quad m = 2, 4 \end{aligned}\right\} \quad (3.91)$$

利用配点法可得：

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (3.92)$$

利用式（3.92）求出$\{X\}$后，即可利用式（3.67）确定边界未知量。

对于图3.4所示的情况及分划，式（3.59）可变为下列形式：

$$\{R\} = \sum_{m=1}^{M} ([A]_m\{a\}_m - [D]_m\{b\}_m) - \{f\} \quad (3.93)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} [A]_m &= [H]_m[N]_m + [H_0]_m[N']_m \\ [D]_m &= [K]_m[N]_m + [K_0]_m[N']_m \end{aligned}\right\} \quad (3.94)$$

$$\{f\} = [f(s_0) \quad f(s_1) \quad f(s_2) \quad \cdots \quad f(s_N)]^T \tag{3.95}$$

这里$f(s_j)$由式（3.57）决定，$[C]_m$中的α及β都等于1。

式（3.93）与边界条件有关，计算时必须引入边界条件。如果边界上第n个边界区域的$q(s_i) = \bar{q}(s_i)$，则

$$[N]_n\{b\}_n = \{\bar{q}\}_n, \quad [N']_n\{a\}_n = \{\bar{q}'\}_n \tag{3.96}$$

如果边界上第n个边界区域的$u(s_i) = \bar{u}(s_i)$，则

$$[N]_n\{a\}_n = \{\bar{u}\}_n, \quad [N']\{a\}_n = \{\bar{u}'\}_n \tag{3.97}$$

当引入边界条件后，式（3.93）便变为

$$\{R\} = [A]\{X\} - \{F\} \tag{3.98}$$

利用配点法可得：

$$[A]\{X\} = \{F\} \tag{3.99}$$

当边界未知量确定后，利用式（3.10）及式（3.12）即可求出区域Ω内任一点的$u(P)$值及$q(P)$值：

$$u(P) = \sum_{m=1}^{M} [\,([u^*(P)]_m[\lambda]_m\{q\}_m + [u_0^*(P)]_m[\lambda]_m\{q'\}_m) - ([q^*(P)]_m[\lambda]_m\{u\}_m + [q_0^*(P)]_m[\lambda]_m\{u'\}_m)\,]h_m + f(P) \tag{3.100}$$

$$q(P) = \sum_{m=1}^{M} [\,([u_1^*(P)]_m[\lambda]_m\{q\}_m + [u_{01}^*(P)]_m[\lambda]_m\{q'\}_m) - ([q_1^*(P)]_m[\lambda]_m\{u\}_m + [q_{01}^*(P)]_m[\lambda]_m\{u'\}_m)\,]h_m + f_1(P) \tag{3.101}$$

式中 $f(P) = u^0(P) - \sum_{m=1}^{M} [\,([u^*(P)]_m[\lambda]_m\{q^0\}$

$+ [u_0^*(P)]_m[\lambda]_m\{q^{0\prime}\}_m) - ([q^*(P)]_m[\lambda]_m\{u\}_m$

$$+[q_0^*(P)]_m[\lambda]_m\{u^{*\prime}\}_m)\}h_m \qquad (3.102)$$

$$f_1(P)=q^*(P)-\sum_{m=1}^{M}[([u_1^*(P)]_m[\lambda]_m\{q\}_m$$

$$+[u_{01}^*(P)]_m[\lambda]_m\{q^{*\prime}\}_m)-([q_1^*(P)]_m[\lambda]_m\{u\}_m$$

$$+[q_{01}^*(P)]_m[\lambda]_m\{u^{*\prime}\}_m)]h_m \qquad (3.103)$$

其中 $[F^*(P)]_m=[F^*(P,s_0)\quad F^*(Ps_1)\quad\cdots\quad F^*(P,s_z)]$

$F^*=u^*,\ u_0^*,\ u_1^*,\ u_{01}^*,\ q^*,\ q_0^*,\ q_1^*,\ q_{01}^*$

$z=N_m$

（三）第三种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则

$$u(s)=\sum_{i=0}^{Z}u_i\phi_i(s),\quad q(s)=\sum_{i=0}^{Z}q_i\phi_i(s) \qquad (3.104)$$

式中$z=N_m$，$\phi_i(s)$采用第一章式(1.27)的形式．将式（3.104）代入式（3.18）可得：

$$\Pi_m(P_0,s)=\sum_{i=0}^{Z}[(\int_{\Gamma_m}u^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma)q_i$$

$$-(\int_{\Gamma_m}q^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma)u_i] \qquad (3.105)$$

式中$u_i=u(s_i)$，$q_i=q(s_i)$，

如果将式（3.105）代入式（3.17）可得：

$$\{R\}=\sum_{m=1}^{M}[H]_m\{u\}_m-\sum_{m=1}^{N}[K]_m\{q\}_m-\{f\} \qquad (3.106)$$

式中 $\{f\}=[f(s_0)\quad f(s_1)\quad f(s_2)\quad\cdots\quad f(s_N)]^T$ （3.107）

$$\{u\}_m=[u_0\quad u_1\quad u_2\quad\cdots\quad u_Z]_m^T$$

$$\{q\}_m=[q_0\quad q_1\quad q_2\quad\cdots\quad q_Z]_m^T$$

$$[H]_m=[C]_m^B+[\widetilde{H}]_m \tag{3.108}$$

$$\left.\begin{aligned}&[\widetilde{H}]_m=[\widetilde{H}_{ji}]_m \quad i=0,1,2,\cdots,N_m\\&[K]_m=[K_{ji}]_m \quad j=0,1,2,\cdots,N\end{aligned}\right\} \tag{3.109}$$

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{H}_{ji}=\int_{\Gamma_m} q^*(s_j,s)\phi_i(s)d\Gamma(s)\\&K_{ji}=\int_{\Gamma_m} u^*(s^\circ,s)\phi_i(s)d\Gamma(s)\end{aligned}\right\} \tag{3.110}$$

式（3.110）可以用数值积分法的各种求积公式进行计算，例如，梯形公式、辛普生公式及高斯求积公式。由式（3.106）可得：

$$\{R\}=[H]\{u\}-[K]\{q\}-\{f\} \tag{3.111}$$

式中 $\{u\}=[\{u\}_1^T\quad \{u\}_2^T\quad\cdots\quad \{u\}_M^T]^T$

$$\{q\}=[\{q\}_1^T\quad \{q\}_2^T\quad\cdots\quad \{q\}_M^T]^T$$

$$\left.\begin{aligned}&[H]=([H]_1\quad [H]_2\quad\cdots\quad [H]_M)\\&[K]=([K]_1\quad [K]_2\quad\cdots\quad [K]_M)\end{aligned}\right\} \tag{3.112}$$

利用配点法由式（3.106）或式（3.111）可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{q\}+\{f\} \tag{3.113}$$

式（3.113）与边界条件有关，计算时必须引入边界条件。

$\{f\}$由式（3.107）确定。由式（3.19）可得：

$$f(s_j)=C(s_j)u^0(s_j)+\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{Z}(H_{ji}^0 u_i^0-K_{ji}^0 q_i^0)$$

式中　$u_i^e = u^e(s_i)$　　$q_i^e = q^e(s_i)$

$$
\left.\begin{aligned}
H_{ji}^e &= \int_{s_i - h_m/2}^{s_i + h_m/2} q^*(s_j, s)\, d\Gamma(s) \\
K_{ji}^e &= \int_{s_i - h_m/2}^{s_i + h_m/2} u^*(s_j, s)\, d(s)
\end{aligned}\right\} \quad (3.114)
$$

式（3.114）可以用数值积分法计算，也可以用解析法求解。对于奇异积分的处理与一般边界元法的处理相同，见文献［2］。

利用式（3.113）求出边界未知量后，即可利用式（3.10）求出区域Ω内任一点P的$u(P)$值：

$$
u(P) = \sum_{m=1}^{M} \Pi_m(P, s) + f(P) \quad (3.115)
$$

式中　$\Pi_m(P, s) = [K(P)]_m \{q\}_m - [H(P)]_m \{u\}_m$　（3.116）

$$
\left.\begin{aligned}
[H(P)]_m &= [\int_{\Gamma_m} q^*(P, s)\phi_i(s)\, d\Gamma(s)] \\
[K(P)]_m &= [\int_{\Gamma_m} u^*(P, s)\phi_i(s)\, d\Gamma(s)
\end{aligned}\right\} \quad i = 0, 1, 2, \cdots z \quad (3.117)
$$

（四）第四种方法

设

$$
\left.\begin{aligned}
u(s) &= [\varphi_{3k}][Q]_m \{u\}_m \\
q(s) &= [\varphi_{3k}][Q]_m \{q\}_m
\end{aligned}\right\} \quad (3.117)
$$

则式（3.18）可变为

$$
\Pi_m(P_e, s) = (\int_{\Gamma_m} u^*(P_e, s)[\varphi_{3k}(s)]\, d\Gamma)[Q]_m \{q\}_m
$$

$$
- (\int_{\Gamma_m} q^*(P_e, s)[\varphi_{3k}(s)]\, d\Gamma)[Q]_m \{q\}_m \quad (3.119)
$$

式中　$[Q]_m = [B]_m^{-1}$　（3.120）

$[B]_m$由第一章式（1.130）确定。如果设$P_0=s_j$（$s_j=0,1,2\cdots,N$），则式（3.17）可变为

$$\sum_{m=1}^{M}[H]_m\{u\}_m=\sum_{m=1}^{M}[K]_m\{q\}_m+\{f\} \tag{3.121}$$

式中 $$[H]_m=[C]_m^B+[\widetilde{H}]_m \tag{3.122}$$

$$\left.\begin{aligned}[\widetilde{H}]_m&=[\int_{\Gamma_m}q^*(s_j,s)[\varphi_{3k}(s)]d\Gamma][Q]_m\\ [K]_m&=[\int_{\Gamma_m}u^*(s_j,s)[\varphi_{3k}(s)]d\Gamma][Q]_m\end{aligned}\right\} \tag{3.123}$$

式（3.123）利用数值积分法的高斯求积公式进行计算。利用式（3.121）可求出边界未知量，但注意引入边界条件。

（五）第五种方法

设 $$\begin{aligned}u(s)&=[\varphi_{3k}][Q]_m\{a\}_m,\\ q(s)&=[\varphi_{3k}][Q]_m\{b\}_m\end{aligned} \tag{3.124}$$

则式（3.18）可变为

$$\Pi_m(P_0,s)=(\int_{\Gamma_m}u^*(P_0,s)[\varphi_{3k}(s)]d\Gamma)[Q]_m\{b\}_m-(\int_{\Gamma_m}q^*(P_0,s)[\varphi_{3k}(s)]d\Gamma)[Q]_m\{a\}_m \tag{3.125}$$

式中 $$[Q]_m=\mathrm{diag}([g],[I],[h]) \tag{3.126}$$

$$[g]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&2\\3&-1\\0&2\end{bmatrix}\qquad[h]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\\2&0\end{bmatrix} \tag{3.127}$$

其中$[I]$为$(z-1)(z-1)$的单位矩阵。$z=N_m$。

如果设$P_0=s_j$（$j=0,1,2,\cdots,N$），则式（3.17）可变为

$$\sum_{m=1}^{M}[H]_m\{a\}_m=\sum_{m=1}^{M}[K]_m\{b\}_m+\{f\} \tag{3.128}$$

式中 $$[H]_m=[C]_m^B[N]_m+[\widetilde{H}]_m \tag{3.129}$$

$[\widetilde{H}]_m$及$[K]_m$可利用式（3.123）进行计算，但$[Q]_m$必须利用式（3.126）确定。利用式（3.128）可求出$\{a\}_m$及$\{b\}_m$，但必须注意引入边界条件。当$\{a\}_m$及$\{b\}_m$确定后，即可求出边界未知量：

$$\{u\}_m=[N]_m\{a\}_m,\quad \{q\}_m=[N]_m\{q\}_m \tag{3.130}$$

式中 $$[N]_m=[B]_m[Q]_m \tag{3.131}$$

当边界未知量确定后，利用式（3.10）及式（3.12）的离散格式即可求出区域Ω内任一点P的$u(P)$值及$q(P)$值。

上述计算格式是以三次样条函数为例建立起来的，但这些格式对n次样条函数都适用。

§3.3 域外奇点样条边界元法

如果P点在区域（$\Omega+\Gamma$）外，则$C(P)=0$,因此式（3.10）便变为

$$\int_\Gamma[q(Q_0)u^*(P,Q_0)-u(Q_0)q^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0)-f=0 \tag{3.132}$$

式中 $$f=\int_\Gamma[q^0(Q_0)u^*(P,Q_0)-u^0(Q_0)q^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0) \tag{3.133}$$

我们可以利用式（3.132）来建立样条边界元法。这种方法称为域外奇点样条边界元法，可以完全避免边界奇异积分。

为了建立域外奇点的样条边界元法，我们围绕着实际边界在域外构造一个与实际边界Γ几何形状相似的虚边界Γ*（图3.5）。

虚边界Γ^*上的结点与实际边界Γ上的结点一一对应，在对应的边界上有相同的法向，而且相似比为$OA'/OA=OB'/OB=\cdots=r>1$，O为区域Ω的形心（图3.6）。

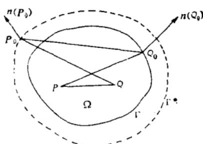


图3.5

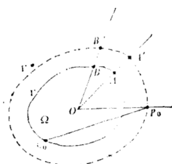


图3.6

如果将整个实际边界分为M部分，则式（3.132）可变为

$$\sum_{m=1}^{M}\Pi_m(P,s)-f(P)=0 \tag{3.134}$$

式中s为实际边界Γ的弧坐标。如果将每个边界区域分为N_m等分（图3.7），则式（3.134）可变为

$$R(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_m(P_0,s)+f(P_0) \tag{3.135}$$

式中$\Pi_m(P_0,s)$及$f(P_0)$的形式相同，但$C(P_0)=0$。注意，这里的P_0点在虚边界Γ^*上，与实际边界Γ上的结点一一对应。如果设$P_0={}_js$（$j=0,1,2,\cdots,N$），则利用上述五种方法可由式（3.135）建立起样条边界元法的计算格式。如果采用第五种方法，则由式（3.135）可得：

$$\sum_{m=1}^{M}[\widetilde{H}]_m\{a\}_m=\sum_{m=1}^{M}[K]_m\{b\}_m+\{f\} \tag{3.136}$$

式中$[\widetilde{H}]_m$及$[K]_m$由式（3.123）确定，但$[Q]_m$必须由式(3.126)确定，s_j在虚边界Γ_m上。

式（3.136）与边界条件有关，计算时必须引入边界条件。当引入边界条件后，式（3.136）可变为

$$[A]\{X\} = \{F\} \tag{3.137}$$

式中$\{X\}$为边界未知量。

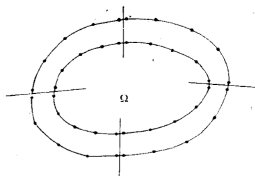


图3.7

利用式（3.137）求出$\{a\}_m$及$\{b\}_m$后，即可利用式（3.130）求出边界未知量。当边界未知量求出后，利用式（3.10）及式（3.12）的离散格式可求出域内P点的$u(P)$值及$q(P)$值。

§3.4 无奇点样条边界元法

利用第二章建立边界积分方程的方法，可将式（3.7）及式（3.8）化为下列边界积分方程：

$$\int_\Gamma [q(Q_0) - q^0(Q_0)] w_j(Q_0) d\Gamma - \int_\Gamma [u(Q_0) - u^0(Q_0)] q_j(Q_0) d\Gamma = 0 \tag{3.138}$$

式中 $\quad q = \partial u/\partial n \qquad q_j = \partial w_j/\partial n \qquad$ （3.139）

由式（3.138）可知：

$$\int_\Gamma [u(Q_0) q_j(Q_0) - q(Q_0) w_j(Q_0)] d\Gamma - f(Q_0) = 0 \tag{3.140}$$

式中w_j满足下列方程：

$$\nabla^2 w_j = 0 \tag{3.141}$$

$$f(Q_0)=\int_\Gamma[u^0(Q_0)q_j(Q_0)-q^0(Q_0)w_j(Q_0)]d\Gamma \tag{3.142}$$

如果将边界分为M个边界区域，则式（3.140）可变为

$$\sum_{m=1}^{M}\Pi_m=0 \tag{3.143}$$

式中

$$\Pi_m=\int_{\Gamma_m}[u(s)q_j(s)-q(s)w_j(s)]d\Gamma-f_m \tag{3.144}$$

$$f_m=\int_{\Gamma_m}[u^0(s)q_j(s)-q^0(s)w_j(s)]d\Gamma \tag{3.145}$$

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则利用第五种方法可得：

$$\Pi_m=(\int_{\Gamma_m}q_j(s)[\varphi_{3k}(s)]d\Gamma)[Q]_m\{a\}_m-(\int_{\Gamma_m}w_j(s)[\varphi_{3k}(s)]d\Gamma)[Q]_m\{b\}_m-f_{jm} \tag{3.146}$$

$$f_{jm}=\sum_{i=1}^{z}(H^0_{ij}u^0_i-K^0_{ij}q^0_i) \tag{3.147}$$

式中

$$u^0_i=u^0(s_i)\qquad q^0_i=q^0(s_i) \tag{3.148}$$

$$\left.\begin{aligned}H^0_{ji}&=\int_{s_i-h_m/2}^{s_i+h_m/2}q_j(s)d\Gamma\\K^0_{ji}&=\int_{s_i-h_m/2}^{s_i+h_m/2}w_j(s)d\Gamma\end{aligned}\right\} \tag{3.149}$$

式（3.147）可以用解析法积分，也可以用数值积分法进行计算。$z=N_m$。

如果$j=0,1,2,\cdots,z$，则式（3.146）可变为

$$\{\Pi\}_m=[H]_m\{a\}_m-[K]_m\{b\}_m-\{f\}_m \tag{3.150}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}[H]_m&=[\int_{\Gamma_m}q_j(s)[\varphi_{3k}(s)]d\Gamma][Q]_m\\[K]_m&=[\int_{\Gamma_m}w_j(s)[\varphi_{3k}(s)]d\Gamma][Q]_m\end{aligned}\right\} \tag{3.151}$$

式（3.151）利用数值积分法的求积公式进行计算。由式（3.143）可知，利用先扩张后叠加的方法可得：

$$[H]\{a\}=[K]\{b\}+\{f\} \qquad (3.152)$$

式中

$$\{a\}=\sum_{m=1}^{M}\{a\}_{m}^{A} \qquad \{b\}=\sum_{m=1}^{M}\{b\}_{m}^{A} \qquad (3.153)$$

$$[H]=\sum_{m=1}^{M}[H]_{m}^{A} \quad \{K\}=\sum_{m=1}^{M}[K]_{m}^{A} \qquad (3.154)$$

$$\{f\}=\sum_{m=1}^{M}\{f\}_{m}^{A} \qquad (3.155)$$

其中$\{a\}_{m}^{A}$、$\{b\}_{m}^{A}$及$\{f\}_{m}^{A}$分别为$\{a\}_m$、$\{b\}_m$及$\{f\}_m$扩大的（$N+1$）维向量；$[H]_{m}^{A}$及$[K]_{m}^{A}$分别为$[H]_m$及$[K]_m$扩大的（$N+1$）阶矩阵。由式（3.154）可知，$[H]$及$[K]$为带状矩阵。

利用式（3.152）可求出$\{a\}_m$及$\{b\}_m$，但必须注意引入边界条件。当$\{a\}_m$及$\{b\}_m$确定后，利用式（3.130）可求出边界未知量。

上述各式中的w_j由式(3.141)确定，它是一个非奇异函数，详见第二章§2.3。上述计算格式是利用第五种方法建立起来的，也可以用其余四种方法建立无奇点样条边界元法的计算格式。

当边界未知量确定后，则域内任一点P的未知量$u(P)$及$q(P)$可用任何一种可行的方法求出来。例如，当边界未知量利用本节的方法确定后，域内任一点P的未知量$u(P)$可用式（3.100）确定。

§3.5 工程应用中的几个问题

（一）子域法应用

一个区域可以分为几个子域来计算。本节以二维问题为例（图3.8），将它分为两个子域。对于第一个子域，可建立下列

方程组：

$$[H_1 \quad H_{1a}]\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_{1a} \end{Bmatrix}=[K_1 \quad K_{1a}]\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_{1a} \end{Bmatrix} \tag{3.156}$$

对于第二个子域，可以建立下列方程组：

$$[H_2 \quad H_{2a}]\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_{2a} \end{Bmatrix}=[K_2 \quad K_{2a}]\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_{2a} \end{Bmatrix} \tag{3.157}$$

式中U_k及Q_k为子域k外部边界Γ_k的未知向量，U_{ka}及Q_{ka}为两个子域交界边Γ_a上的未知向量，即

$$U=\{u\} \qquad Q=\{q\}$$

利用两个子域交界处的连续条件可得：

$$\left.\begin{aligned} U_{1a}&=U_{2a}=U_a \\ Q_{1a}&=-Q_{2a}=Q_a \end{aligned}\right\} \tag{3.158}$$

将式（3.158）代入式（3.156）及式（3.157）可得：

$$[K_1 \quad K_{1a} \quad -H_{1a}]\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_a \\ U_a \end{Bmatrix}=H_1U_1 \tag{3.159}$$

$$[-K_{2a} \quad -H_{2a} \quad K_2]\begin{Bmatrix} Q_a \\ U_a \\ Q_2 \end{Bmatrix}=H_2U_2 \tag{3.160}$$

将式（3.159）及式（3.160）合并起来便得：

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_{1a} & -H_{1a} & 0 \\ 0 & -K_{2a} & -H_{2a} & K_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_a \\ U_a \\ Q_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \tag{3.161}$$

如果在边界Γ_1及边界Γ_2上的u为已知，则整个边界Γ上的未知量$q(Q_0)$可利用式（3.161）确定。如果在边界Γ_1上u已知，在边界Γ_2上q已知，则式（3.161）可变为

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_{1a} & -H_{1a} & 0 \\ 0 & -K_{2a} & -H_{2a} & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_a \\ U_a \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{Q}_2 \end{Bmatrix} \tag{3.162}$$

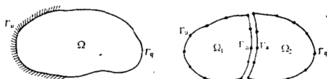


图3.8

利用式（3.162）可求出边界未知量。如果区域是非均匀的，则这个区域可分为若干个子域进行计算。当计算区域过分狭长时，为了保证计算结果有足够的精度，可以将它分为几个形状较短的子域进行计算。由上述可知，如果将整个区域分为若干个子域计算时，则边界未知量的系数矩阵便变为带状矩阵。这种方法对弹性力学、板壳等其他问题都适用。

（二）无限域问题

在位势问题计算中，常常遇到无限域问题。图3.9是一个无限域，当$b=0$时，它的边界积分方程为

$$\begin{aligned} C(P)u(P) = & \int_{\Gamma_1}[q(Q_0)u^*(P,Q_0) \\ & - u(Q_0)q^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0) \\ & + \int_{\Gamma_2}[q(Q_0)u^*(P,Q_0) \\ & - u(Q_0)q^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0) \end{aligned} \tag{3.163}$$

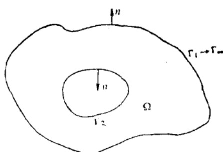


图3.9

当$\Gamma_1\to\Gamma_\infty$时，可以证明：

$$\lim_{\Gamma_1\to\Gamma_\infty}\int_{\Gamma_1}[q(Q_0)u^*(P,Q_0)-u(Q_0)q^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0)$$
$$=0 \qquad (3.164)$$

因此式（3.163）可以变为

$$C(P)u(P)=\int_{\Gamma_2}[q(Q_0)u^*(P,Q_0)$$
$$-u(Q_0)q^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0) \qquad (3.165)$$

（三）区域积分的处理

式（3.1）及式（3.2）可以化为下列边界积分方程：

$$C(P)u(P)=\int_{\Gamma}[q(Q_0)u^*(P,Q_0)$$
$$-u(Q_0)q^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0)+f \qquad (3.166)$$

式中 $$f=\int_{\Omega}b(Q)u^*(P,Q)d\Omega \qquad (3.167)$$

式（3.167）为区域积分，它可以变为边界积分。下面介绍两种方法：

(1) 第一种方法。如果设

$$\nabla^2 b(Q)=0 \qquad Q\in\Omega \qquad (3.168)$$

$$\nabla^2 F=u^*(P,Q) \qquad (3.169)$$

则利用格林第二公式可得：

$$f=\int_{\Gamma}(b\partial F/\partial n-F\partial b/\partial n)d\Gamma \tag{3.170}$$

（2）第二种方法。如果设

$$\partial F/\partial x=bu^{*} \tag{3.171}$$

则式（3.167）便变为

$$f=\int_{\Gamma}F\cos(n,x)d\Gamma \tag{3.172}$$

由上述可知，利用式（3.170）或式（3.172）可以将区域积分化为边界积分。

（四）$u^*(s_j,s_i)$及$q^*(s_j,s_i)$的计算方法

本节以二维问题为例，因此

$$\left.\begin{aligned}u^*(s_j,s_i)&=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right)\\ q^*(s_j,s_i)&=-\frac{1}{2\pi r}\cos\theta\end{aligned}\right\}i\neq j \tag{3.173}$$

式中 r 及 θ 如图3.10所示。当 $i\neq j$ 时，可利用式（3.173）确定$u^*(s_j,s_i)$及$q^*(s_j,s_i)$。

当$i=j$时，$u^*(s_i,s_i)$可以利用式（3.31）确定：

$$\begin{aligned}u^*(s_i,s_i)&=\frac{1}{h}\int_{s_i-\frac{h}{2}}^{s_i+\frac{h}{2}}u^*(s_i,s)d\Gamma\\ &=\frac{1}{2\pi h}\int_{s_i-\frac{h}{2}}^{s_i+\frac{h}{2}}\ln\left(\frac{1}{r}\right)d\Gamma\end{aligned} \tag{3.174}$$

由图3.11可知：$r=s-s_i$。当$s=s_i$时，则$r=0$；当 $s=s_i-\frac{h}{2}$时，

则 $r=-h/2$；当 $s=s_i+\frac{h}{2}$时，则 $r=h/2$ 。因此式（3.174）可变为

$$u^*(s_i,s_i) = \frac{1}{\pi h}\int_0^{\frac{h}{2}}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dr \tag{3.175}$$

由此可得：

$$u^*(s_i,s_i) = \frac{1}{2\pi}\left[1-\ln\left(\frac{h}{2}\right)\right] \tag{3.176}$$

因为由图3.10及图3.11可得：

$$\cos\theta = d/r,\quad r^2 = d^2+(s-s_i)^2 \tag{3.177}$$

因此 $$q^* = -\frac{1}{2\pi r}\cos\theta = -\frac{d}{2\pi[d^2+(s-s_i)^2]} \tag{3.178}$$

式中 d 是 j 点与 i 点切线之间的距离。利用式（3.30）可得：

$$q^*(s_i,s_i) = \frac{1}{h}\int_{s_i-\frac{h}{2}}^{s_i+\frac{h}{2}} q^*(s_i,s)d\Gamma$$

$$= -\frac{1}{2\pi h}\int_{s_i-\frac{h}{2}}^{s_i+\frac{h}{2}}\frac{d}{d^2+(s-s_i)^2}ds \tag{3.179}$$

当 $i=j$ 时，因为 $d=0$，因此由式（3.179）可知：

$$q^*(s_i,s_i) = 0$$

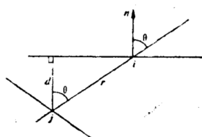


图3.10

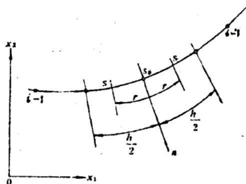


图3.11

§3.6 动水压力的样条边界元法

为了分析地震时坝体的应力及变形，必须考虑水库内的水体与挡水坝的共同作用。为此就必须研究水体微幅运动时作用在坝体迎水面上的附加水压力。这个附加水压力，一般称为动水压力。本节介绍样条边界元法解动水压力问题。实例计算结果表明，此法不仅具有精度高、适应性强的优点，而且易于编制程序，输入数据少，内存少，能在微机上实现。

（一）计算公式

为了计算方便，我们作如下假定：（1）地震时，库水与坝体的运动是二维小振动；（2）不考虑水的粘滞性；（3）不考虑自由水面波动效应；（4）坝体是刚性的，地震时坝体与地基一起作水平谐和运动。在上述假定条件下，水体应满足下列方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\&\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\qquad (3.180)$$

式中 u 及 v 是水体质点的位移分量，p 是动水压力，它们都是 x,y,t 的函数，ρ 是水的密度，c 是水中的声速，t 是时间。

根据假设（4），地震时刚性坝上游面的加速度可表为 $e^{i\omega t}$，其中 ω 是激振频率，于是可设

$$p=p_0(x,y)e^{i\omega t}\qquad (3.181)$$

将式（3.181）代入式（3.180）第三式便得：

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2}+k^2 p_0=0\quad (x,y)\in\Omega\qquad (3.182)$$

式中　　$k=\omega/c$　　(3.183)

式(3.182)为Helmhotz方程。如果假定水是不可压缩的，则$c\to\infty$，$k\to 0$，因此式(3.182)便变为Laplace方程：

$$\nabla^2 p_0 = 0 \qquad (x,y)\in\Omega \tag{3.184}$$

对于式(3.182)或(3.184)常见的边界条件有下列两种：

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \overline{p_0} & (x,y)\in\Gamma_p \\ q_0 &= \partial p_0/\partial n = \overline{q_0} & (x,y)\in\Gamma_q \end{aligned}\right\} \tag{3.185}$$

例如，当刚性坝体与地基作水平谐和运动时，图3.12所示水库区域的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &p_0 = 0, \quad y=H;\ q_0=0,\ y=0 \\ &q_0 = -\rho\ddot{u},\ x=L;\ q_0=0,\ x=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.186}$$

式中$\ddot{u}$是水质点沿坝面的法向加速度，n为库水边界的向外法线，其正方向指向水体外部。假设坝体铅直上游处水质点的水平加速度等于地面的水平加速度，关于边界条件的详细叙述见文献[7]及文献[8]。

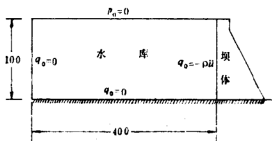


图3.12

(二)边界积分方程[8]

1. Laplace方程的边界积分方程

式(3.184)可以变为下列边界积分方程：

$$C(P)p_0(P) = \int_\Gamma [q_0(Q_0)p_0^*(P,Q_0) - p_0(Q_0)q_0^*(P,Q_0)]d\Gamma(Q_0) \quad (3.187)$$

式中
$$\left.\begin{aligned} q_0^* &= \partial p_0^*/\partial n \\ p_0^* &= \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3.188)$$

1. Helmhotz 方程的边界积分方程

利用格林第二公式，可以将式（3.182）变为下列形式：

$$\int_\Omega (\nabla^2 p_0^* + k^2 p_0^*) p_0 d\Omega = -\int_\Gamma (q_0 p_0^* - p_0 q_0^*) d\Gamma \quad (3.189)$$

如果设 p_0^* 满足下列方程：

$$\nabla^2 p_0^* + k^2 p_0^* = -\delta(P,Q) \quad (3.190)$$

将式（3.190）代入式(3.189)得到的边界积分方程与式(3.187)相同，只不过 p_0^* 由式（3.190）确定。
由式（3.190）可得：

$$p_0^* = -\frac{1}{4}N_0(kr) \quad (3.191)$$

式中 r 是 P 点到 Q_0 点的距离，$N_0(kr)$是零阶 Nenman 函数。

（三）样条边界元法

由上述可知，§3.2至§3.4所示的样条边界元法的计算格式对动水压力的计算都适用，只要将 u 及 u^* 分别用 p_0 及 p_0^* 代替，将 q 及 q^* 分别用 q_0 及 q_0^* 代替就行了。用样条边界元法解动水压力的具体计算过程与§3.2相同，见文献[6]。

§3.7 三维问题的样条边界元法

对于三维问题，边界元法只对整个物体表面剖分单元，常见的边界元有三角形单元和四边形单元。还可以用等参元分析三维问题[9]。本节介绍一个三维问题的样条边界元法，它是以坐标变换及样条函数为基础的，先利用坐标变换将任意四边形单元（或子域）变换为正方形单元，然后利用边界积分方程及B样条函数建立样条边界元法的计算格式[10]。

（一）坐标变换[11]

图3.13是一个四结点四边形单元（或边界子域），它的坐标变换公式为

$$x=\sum_{k=1}^{4}N_k x_k,\qquad y=\sum_{k=1}^{4}N_k y_k,\qquad z=\sum_{k=1}^{4}N_k z_k \tag{3.192}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&N_1=(1-\xi)(1-\eta),\quad N_3=\xi\eta\\&N_2=\xi(1-\eta),\quad N_4=(1-\xi)\eta\end{aligned}\right\} \tag{3.193}$$

在图3.13中，图（a）是实际边界单元，图（b）是基本单元，它们之间变换是一一对应的，有一种映射关系。因此，在式(3.192)的变换下，图3.13a可以变为图3.13b。图3.13b为$\xi\eta$平面的单位正方形（$0\leqslant\xi\leqslant1$，$0\leqslant\eta\leqslant1$）。

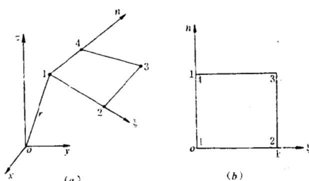


图3.13

图3.14是一个八结点四边形单元（或边界子域），它的坐标变换公式为

$$x=\sum_{k=1}^{8}N_{k}x_{k},\quad y=\sum_{k=1}^{8}N_{k}y_{k},\quad z=\sum_{k=1}^{8}N_{k}z_{k} \tag{3.194}$$

式中 $N_1=(1-\xi)(1-\eta)(-2\xi-2\eta+1)$

$$N_3=\xi(1-\eta)(2\xi-2\eta-1)$$

$$N_8=\xi\eta(2\xi+2\eta-3)$$

$$N_6=(1-\xi)\eta(-2\xi+2\eta-1)$$

$$N_2=4(1-\xi)\xi(1-\eta),\quad N_5=4\xi\eta(1-\eta)$$

$$N_7=4(1-\xi)\xi\eta,\quad N_4=4(1-\xi)(1-\eta)\eta \tag{3.195}$$

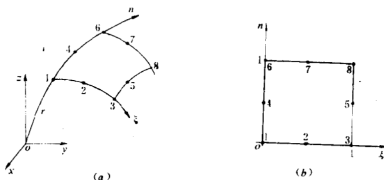


图3.14

（二）样条边界元法

如果将边界分为 J 个边世区域，则式（3.10）便变为

$$C(P_0)u(P_0)=\sum_{m=1}^{J}\Pi_m(P_0,Q_0)+f \tag{3.196}$$

式中

$$f=C(P_0)u^0(P_0)-\sum_{m=1}^{J}\Pi_m^0(P_0,Q_0) \tag{3.197}$$

$$\begin{aligned}\Pi_m(P_0,Q_0)=\int_{\Gamma_m}[\,&u^*(P_0,Q_0)q(Q_0)\\&-q^*(P_0,Q_0)u(Q_0)\,]\,d\Gamma(Q_0)\end{aligned} \tag{3.198}$$

$$\begin{aligned}\Pi_m^0(P_0,Q_0)=\int_{\Gamma_m}[\,&u^*(P_0,Q_0)q^0(Q_0)\\&-q^*(P_0,Q_0)u^0(Q_0)]\,d\Gamma(Q_0)\end{aligned} \tag{3.199}$$

因为在式（3.192）、式(3.194)所示的坐标变换下，$d\Gamma$可以变为下列形式：

$$d\Gamma=|A|\,d\xi d\eta \tag{3.200}$$

因此，经过坐标变换后，式(3.198)及式(3.199)便变为

$$\begin{aligned}\Pi_m(P_0,Q_0)=\int_{\Gamma_m}[\,&u^*(P_0,Q_0)q(Q_0)\\&-q^*(P_0,Q_0)u(Q_0)\,]\,|A|\,d\xi d\eta\end{aligned} \tag{3.201}$$

$$\begin{aligned}\Pi_m^0(P_0,Q_0)=\int_{\Gamma_m}[\,&u^*(P_0,Q_0)q^0(Q_0)\\&-q^*(P_0,Q_0)u^0(Q_0)]\,|A|\,d\xi d\eta\end{aligned} \tag{3.202}$$

式中　$Q_0=(\xi,\eta)$，　$\int_{\Gamma_m}=\int_0^1\int_0^1$

$$|A|=\left(g_1^2+g_2^2+g_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.203}$$

$$\left.\begin{aligned}g_1&=\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\\g_2&=\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)\\g_3&=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.204}$$

1. 第一种方法

如果将边界区域Γ_m沿ξ方向分为N_m等分，沿η方向分为M_m等分（图3.15），则式(3.201)及式(3.202)便变为

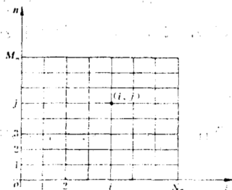


图3.15

$$\Pi_m(P_0,\xi_i,\eta_j)=\sum_{i=0}^{N_m}\sum_{j=0}^{M_m}\lambda_i\lambda_j[u^*(P_0,\xi_i,\eta_j)q(\xi_i,\eta_j)$$

$$-q^*(P_0,\xi_i\eta_j)u(\xi_i,\eta_j)]|A|h_{1m}h_{2m} \tag{3.205}$$

$$\prod_m^0(P_0,\xi_i\eta_j)=\sum_{i=0}^{N_m}\sum_{j=0}^{M_m}\lambda_i\lambda_j[u^*(P_0,\xi_i,\eta_j)q^0(\xi_i,\eta_j)$$

$$-q^*(P_0,\xi_i,\eta_j)u^0(\xi_i,\eta_j)]|A|h_{1m}h_{2m} \qquad (3.206)$$

式中　$h_{1m}=1/N_m$, $h_{2m}=1/M_m$

将式(3.205)代入式(3.196)便得下列残数方程：

$$R(P_0)=C(P_0)u(P_0)-\sum_{m=1}^{J}\prod_m(P_0,\xi_i,\eta_j)-f(P_0) \qquad (3.207)$$

式中　$f(P_0)=C(P_0)u^0(P_0)-\sum_{m=1}^{J}\prod_m^0(P_0,\xi_i,\eta_j) \qquad (3.208)$

如果设$P_0=P_k$, $\overline{Q}_l=(\xi_i,\eta_j)$, 则

$$u_l=u(\overline{Q}_l)=u(\xi_i,\eta_j)$$

$$q_l=q(\overline{Q}_l)=q(\xi_i,\eta_j),\ l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

$$u_k=u(P_k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N \qquad (3.209)$$

式中Q_l点的编号如图3.16所示。因此，将式(3.209)代入式(3.207)可得：

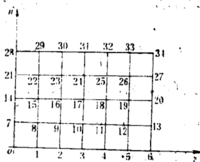


图3.16

$$\{R\}=[C]\{u\}+\sum_{m=1}^{J}([\widetilde{H}]_m\{u\}_m - [K]_m\{q\}_m)-\{f\} \qquad (3.210)$$

式中 $$\{f\}=[C]\{u^0\}+\sum_{m=1}^{J}([\widetilde{H}]_m\{u^0\}_m-[K]_m\{q^0\}_m \qquad (3.211)$$

$$\{u\}=[u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N]^{\mathrm{T}}$$

$$\{u\}_m=[u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_r]_m^T$$

$$\{q\}_m=[q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_r]_m^T$$

$$\left.\begin{aligned}[\widetilde{H}]&=h_{1m}h_{2m}[q^*]_m[s]_m[\lambda]_m\\ [K]_m&=h_{1m}h_{2m}[u^*]_m[s]_m[\lambda]_m\end{aligned}\right\} \qquad (3.212)$$

$$[C]=\mathrm{diag}(C_0, \ C_1, \ C_2, \ \cdots, \ C_N) \qquad (3.213)$$

其中 $$[\lambda]=[\lambda]_{1m}\otimes[\lambda]_{2m} \qquad (3.214)$$

$$\left.\begin{aligned}[\lambda]_{1m}&=\mathrm{diag}(\lambda_0, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \cdots, \ \lambda_{z1})\\ [\lambda]_{2m}&=\mathrm{diag}(\lambda_0, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \cdots, \ \lambda_{z2})\end{aligned}\right] \qquad (3.215)$$

$$\left.\begin{aligned}[u^*]_m&=[u^*(P_k,\overline{Q_l})]_m\\ [q^*]_m&=[q^*(P_k, \ \overline{Q}_l)]_m\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&k=0,1,2\cdots,N\\ &l=0,1,2,\cdots,r\end{aligned} \qquad (3.216)$$

$$[s]_m=\mathrm{diag}(s_0, \ s_1, \ s_2, \ \cdots, \ s_r) \qquad (3.217)$$

$$s_r=|A(Q_l)| \qquad l=0, \ 1, \ 2, \ \cdots, \ r \qquad (3.218)$$

这里 $$r=(N_m+1)(M_m+1)$$

$$z1=N_m \qquad z2=M_m$$

$$[A]\otimes[B]=[a_{ij}[B]] \tag{3.219}$$

基本解$F^*(P_k, \overline{Q_l})$可以用配点法确定，也可用下列积分式确定：

$$F^*(P_k, \overline{Q_l})=\frac{1}{h_{1m}h_{2m}}\int_{-h_{1m}/2}^{h_{1m}/2}\int_{-h_{2m}/2}^{h_{2m}/2}F^*(P_k,Q_0)d\xi d\eta \tag{3.220}$$

式中　$F^*=u^*$, q^*; $Q_0=(\xi, \eta)$

式（3.220）可用高斯求积公式计算。式（3.210）可以写成下列形式：

$$\{R\}=[H]\{u\}-[K]\{q\}-\{f\} \tag{3.221}$$

利用配点法可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{q\}+\{f\} \tag{3.222}$$

式（3.222）与边界条件有关。利用式（3.222）可求出边界未知量，但要注意引入边界条件。当边界未知量确定后，利用式（3.10）及式（3.12）的离散化格式即可求出域内任一点的$u(P)$值及$q(P)$值。

2. 第二种方法

如果边界未知量用三次B样条函数逼近，则

$$\left.\begin{aligned}u_m(Q_0)&=\sum_{i=0}^{s1}\sum_{j=0}^{s2}u_{ijm}\phi_i(\xi)\psi_j(\eta)\\q_m(Q_0)&=\sum_{i=0}^{s1}\sum_{j=0}^{s2}q_{ijm}\phi_i(\xi)\psi_j(\eta)\end{aligned}\right\} \tag{3.223}$$

式中　$Q_0=(\xi,\eta)$;　$u_{ijm}=u_m(\xi_i,\eta_j)$, $q_{ijm}=q_m(\xi_i,\eta_j)$

$\phi_i(\xi)$及$\psi_j(\eta)$为三次B样条函数构成的基函数，可采用第一章式（1.27）所示的形式。

将式（3.223）代入式（3.201）可得：

$$
\Pi_m(P_0,Q_0)
$$

$$
=\sum_{i=0}^{r1}\sum_{j=0}^{r2}\left(\int_{\Gamma_m}u^*(P_0,Q_0)\phi_i(\xi)\psi_j(\eta)|A|d\xi d\eta\right)q_{ijm}
$$

$$
-\sum_{i=0}^{r1}\sum_{j=0}^{r2}\left(\int_{\Gamma_m}q^*(P_0,Q_0)\phi_i(\xi)\psi_j(\eta)|A|d\xi d\eta\right)u_{ijm}
\tag{3.22}
$$

式中 $\int_{\Gamma_m}=\int_0^1\int_0^1$

如果设 $u_{ijm}=u_{lm}=u_m(\overline{Q}_l)$

$$
q_{ijm}=q_{lm}=q_m(\overline{Q}_l)
$$

$$
\phi_i(\xi)\psi_j(\eta)=N_l(\xi,\eta) \tag{3.225}
$$

则式（3.223）可变为

$$
\left.\begin{aligned}
u_m(Q_0)&=\sum_{l=0}^{r}u_{lm}N_l(\xi,\eta)\\
q_m(Q_0)&=\sum_{l=0}^{r}q_{lm}N_l(\xi,\eta)
\end{aligned}\right\} \tag{3.226}
$$

由上述可知，式（3.196）可变为

$$
C(P_0)u(P_0)
$$

$$
=\sum_{m=1}^{J}\left[\sum_{l=0}^{r}\left(\int_{\Gamma_m}u^*(P_0,Q_0)N_l(\xi,\eta)|A|d\xi d\eta\right)q_{lm}\right.
$$

$$
\left.-\sum_{l=0}^{r}\left(\int_{\Gamma_m}q^*(P_0,Q_0)N_l(\xi,\eta)|A|d\xi d\eta\right)u_{lm}\right]
$$

$$
+f(P_0) \tag{3.227}
$$

如果设$P_0=P_k$（$k=0, 1, 2, \cdots, N$），则式（3.227）可变为

$$[C]\{u\}=\sum_{m=1}^{J}([K]_m\{q\}_m-[\widetilde{H}]_m\{u\}_m)+\{f\} \tag{3.228}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&[\widetilde{H}]_m=[\widetilde{H}_{kl}]_m \qquad k=0, 1, 2, \cdots, N\\&[K]_m=[K_{kl}]_m \qquad l=0, 1, 2, \cdots, r\end{aligned}\right\} \tag{3.229}$$

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{H}_{kl}&=\int_{\Gamma_m}q^*(p_k,\xi,\eta)N_l(\xi,\eta)|A|d\xi d\eta\\K_{kl}&=\int_{\Gamma_m}u^*(p_k,\xi,\eta)N_l(\xi,\eta)\|A\|d\xi d\eta\end{aligned}\right\} \tag{3.230}$$

式（3.230）可利用二维高斯求积公式计算，见第一章附录。由式（3.228）可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{q\}+\{f\} \tag{3.231}$$

式中 $\{f\}=[\,f(P_0)\quad f(P_1)\quad\cdots\quad f(P_N)\,]^T$ （3.234）

$f(P_k)$可以利用公式（3.197）确定。式（3.231）与边界条件有关，计算时必需引入边界条件。

§3·8 计算例题

我们利用Fortran77语言编制了计算程序，在IBM—PC微机上计算一些例题。计算结果表明，样条边界元法的程序简单，计算时间少，精确度也高，值得推广使用[1][6]。

【例3.1】 图3.17为流体绕两个平行的平板之间的圆柱体流动。u表示流线型而$q=\partial u/\partial n$为流速，求u及q值。

由于对称，只需取四分了一进行计算。图3.18a为计算简图的边界条件。

我们用一次样条边界元法对图3.18a进行计算，计算结果见图3.18b。这个计算结果与有限元法的计算结果相差很小。一次样条边界元法的计算格式与普通边界元法中常边界元法的计算格式相当，但工作量比常单元少，原因是本法一开始就直接对边界积分方程进行数值积分，且采用最简单的梯形求积公式，而普通边界元法中的常边界元是按高斯求积公式进行求积。因此，在划同样多单元的情况下，常单元所用数值积分的计算工作量是一次样条边界元法的四倍。普通边界元法中线单元的工作量就更大。一次样条边界元法的结果相当于线性边界元结果的精度，但工作量比单元线少得多[2]。

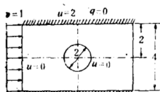


图3.17

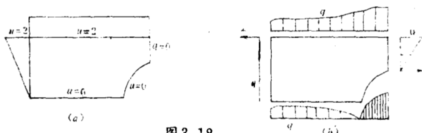


图3.18

【例3.2】 环形域内的边值问题为

$$\nabla^4 u = 4 \qquad \forall P \in \{(r,\theta) \mid 1 < r < 2\}$$

$$u = 1, \qquad r = 1;$$

$$u = 4, \qquad r = 2。$$

利用样条边界元法求u及q值（图3.19）。

本例采用极坐标，其精确解为$u = r^2$。取$N = 32$等分（图3.19），计算结果列在表3.1中。

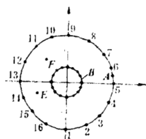


图3.19

表3.1　　　　　　　u及q的计算结果

位　置	A (2, π/16)	B (1, π/16)	C (1.8, π/3)	D (1.5, $-\pi/3$)	E (1.5, $-7\pi/8$)	F (1.2, $3\pi/4$)
未知量	q_A	u_B	u_C	q_D	u_E	u_F
样条边界元法	3.996	1.965	3.336	2.255	2.255	1.465
精确解	4	2	3.24	2.25	2.25	1.440

【例3.3】　图3.20为扭杆的矩形截面，求它的扭转应力。

扭转应力函数的边值问题为

$$\nabla^2\varphi = -2G\theta$$

$$\varphi|_\Gamma = 0$$

我们用一次样条边界元法计算扭转应力，把边界均匀地分为22等分。计算结果列在表3.2中。

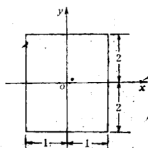


图3.20

表3.2　　　　扭转应力函数的计算结果

坐标	样条边界元法	解析法	坐标	样条边界元法	解析法
(0.8, 1)	0.2985	0.2907	(0, -0.5)	0.8845	0.8821
(0.5, 1)	0.5960	0.5918	(-0.5, -0.5)	0.6697	0.6666
(0, 1)	0.7788	0.7769	(-0.8, -0.5)	0.3282	0.3235
(-0.5, 1)	0.5948	0.5918	(0.8, 0)	0.3325	0.3328
(-0.8, 1)	0.2978	0.2907	(0, 0)	0.9137	0.9110
(0.8, -0.5)	0.3280	0.3235	(-0.5, 0)	0.6898	0.6870
(0.5, -0.5)	0.6695	0.6666			
乘子	$G\theta$	$G\theta$	乘子	$G\theta$	$G\theta$

【例3.4】　计算水库坝体的动水压力[8]。

首先不虑水体的可压缩性（图3.21）平底水库，刚性坝铅直上游面上的动水压力与解析解的比较如图3.22所示。计算时取水库长度为坝高四倍，整个边界共分40段，采用三次样条边界元法。

当坝体上游面倾斜时（图3.23），动水压力随倾斜度的增加而减少。图3.24是随e变化时动水压力的变化。

当水库底倾斜时（图3.25），动水压力随倾斜度的增加而减少，图3.26是动水压力随h变化的示意图。

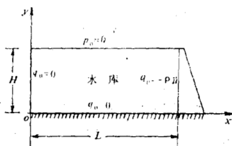


图3.21

当水体为可压缩性液体时，动水压力与激振频率有关。图3.27为ω/ω_1小于1时图3.21所示刚性体上游面的动水压力。ω_1是水库的基本自振频率。由图3.27可知，当ω/ω_1很小时动水压力接近于不可压缩液体的结果。当ω/ω_1趋于1时动水压力趋于无穷大。

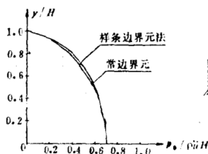


图3.22

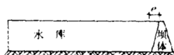


图3.23

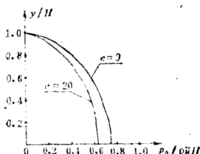


图3.24

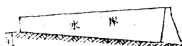


图3.25

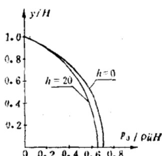


图3.26

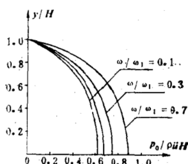


图3.27

上述主要介绍各向同性的线性的位势问题。对于正交异性位势问题及非线性位势问题，见文献[2]及文献[12]，利用这些边界积分方程可以建立正交异性位势及非线性位势问题的样条边界元法，见文献[13]及文献[14]。

参 考 文 献

[1]秦荣，王汉波，位势问题的样条边界元法，西南四省一市计算力学学术会议论文，1987年。

[2]C.A.BLebbia, The Boundary Ellement Method For Engineers, Pentech Press, 1978。

[3]田中正降，田中喜久昭，境界要素法—基础及应用，丸善株式会社，1982。

[4]秦荣，域外奇点样条边界元法，广西大学，1983年。

[5]秦荣，无奇点样条边界元法，广西大学，1984年。

[6]秦荣，王战营，样条边界元法解动水压力，西南四省一市计算力学学术会议论文，1987年。

[7]王良琛，混凝土坝地震动力分析，地震出版社，1981年。

[8]华东水利学院，弹性力学问题的有限单元法，水利出版社，1982年。

[9]C.A.Brebbia, S.Walker, Boundary Element Techniques in Engineering, 1980.

[10]秦荣，三维问题样条边界元法，广西大学，1984年。

[11]秦荣，非规则薄板的样条子域法，广西大学学报，2（1985）。

[12]C.A.Brebbia(Ed), progress in Boundary Element Method, Vol.2, pentech press, 1983.

[13]秦荣，正交异性位势问题样条边界元法，广西大学，1985年。

[14]秦荣，非线性位势问题样条边界元法，广西大学，1985年。

[15]姜弘道，动水压力的边界元法，河海大学学报，3（1986）。

[16]秦荣、样条边界元法，广西大学内部资料，1987年。

第四章 弹性力学的样条边界元法

在工程设计中，许多问题可以化为求解弹性力学问题。例如，坝体应力分析，岩体地应力分析，固体裂缝尖端应力分析，高层建筑剪力墙应力分析，各种工程中深梁应力分析及固体接触问题，都可以按弹性力学问题进行分析。因此，弹性力学问题是一个非常重要的研究课题。

弹性力学问题有线性的，也有非线性的。本章主要介绍线性弹性力学问题的样条边界元法，它基于下列假设：（1）固体是完全弹性的，应力与应变成线性关系；（2）材料各向同性；（3）位移及变形是微小的。这个方法的计算格式十分简单，容易在微型电子计算机上实现。计算结果表明，利用样条边界元法计算弹性力学问题，不仅计算方便，而且精确度也高。

§4.1 基本方程

在直角坐标系$ox_1x_2x_3$中，弹性力学的平衡方程为

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0 \quad i=1,2,3;\ j=1,2,3 \tag{4.1}$$

边界条件为

$$u_i=\overline{u}_i \qquad Q\in\Gamma_u \tag{4.2}$$

$$p_i=\overline{p}_i \qquad Q\in\Gamma_p \tag{4.3}$$

式中：σ_{ij}——应力分量；

b_i——x_i方向的体力力量；

p_i——x_i方向的面力分量，$\overline{p}_i$是已知值；

u_i——x_i方向的位移力量，$\overline{u}_i$是已知值。

应力与面力的关系为

$$p_i=\sigma_{ij}n_j \quad i=1,2,3;\ j=1,2,3 \tag{4.4}$$

式中 n_j 是相对于 x_j 的外法线 n 的方向余弦，即

$$n_j=\cos(n,x_j)$$

应变与位移的关系为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{4.5}$$

式中 ε_{ij}——应变分量；$i=1,2,3$；$j=1,2,3$。

应力与应变的关系为

$$\sigma_{ij}=D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad k=1,2,3;\ j=1,2,3 \tag{4.6}$$

对于各向同性弹性体，则式（4.6）中的 D_{ijkl} 可变为

$$D_{ijkl}=A\delta_{ij}\delta_{kl}+G(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{jk}\delta_{il}) \tag{4.7}$$

式中 $\quad A=2G\mu/(1-2\mu)$，$G=E/2(1+\mu) \qquad (4.8)$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{4.9}$$

其中 μ 是泊松系数，E 是弹性模量，因此，式（4.6）可以变为

$$\sigma_{ij}=2G\varepsilon_{ij}+A\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \tag{4.10}$$

反之 $\quad \varepsilon_{ij}=\sigma_{ij}/2G-B\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad (4.11)$

式中 $\quad B=\mu/2G(1+\mu) \qquad (4.12)$

应力与位移的关系为

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{2}D_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k}) \tag{4.13}$$

将式（4.5）代入式（4.6）便得式（4.13）。对于各向同性弹性体，式（4.13）便变为

$$\sigma_{ij}=A\delta_{ij}u_{k,k}+G(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{4.14}$$

式中 $D_{ijkl}=D_{jikl}=D_{ijlk}=D_{klij}$ (4.15)

将式（4.13）代入式（4.1）便得：

$$D_{ijkl}u_{k,lj}+b_i=0 \tag{4.16}$$

对于各向同性弹性体，式（4.16）便变为

$$[A\delta_{ij}\delta_{kl}+G(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{jk}\delta_{il})]u_{k,lj}+b_i=0 \tag{a}$$

利用克罗内克 δ 符号的性质可知：

$$\left.\begin{aligned}&\delta_{ij}\delta_{kl}u_{k,lj}=\delta_{ij}u_{k,kj}=u_{k,ki}\\&\delta_{ik}\delta_{jl}u_{k,lj}=\delta_{ik}u_{k,jj}=u_{i,jj}\\&\delta_{il}\delta_{jk}u_{k,lj}=\delta_{il}u_{j,lj}=u_{j,ij}=u_{j,ji}\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

同时 $u_{k,ki}=u_{j,ji}$ (c)

将式（b）代入式（a），并考虑式（c），便得

$$(A+G)u_{j,ji}+Gu_{i,jj}+b_i=0 \tag{4.17}$$

又因为 $A+G=G/(1-2\mu)$，因此式(4.17)可变为

$$\frac{G}{1-2\mu}u_{j,ji}+Gu_{i,jj}+b_i=0 \tag{4.18}$$

这就是用位移表示的平衡方程，称为Navier方程。式中μ为泊松系数。

将式（4.13）代入式（4.4）便得

$$p_i=Au_{k,k}\delta_{ij}n_j+G(u_{i,j}+u_{j,i})n_j \tag{4.19}$$

这就是面力与位移的关系。

本章采用爱因斯坦的求和约定，并且规定

$$F_{,i}=\partial F/\partial x_i,\quad F_{,ij}=\partial^2 F/\partial x_i\partial x_j$$

详细内容见第一章。

§4.2 边界积分方程

对于弹性力学问题，建立边界积分方程可以用加权残数法，

也可以用外功互等定理。本章利用外功互等定理建立弹性力学问题的边界积分方程。

（一）外功互等定理

对于弹性力学问题，由外功互等定理可得下列表达式：

$$\int_{\Gamma} p_l u_l^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_l u_l^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_l^* u_l d\Gamma + \int_{\Omega} b_l^* u_l d\Omega \qquad l=1,2,3 \qquad (4.20)$$

它的物理意义是：第一组平衡力系p_l在第二组位移u_l^*上所做的功等于第二组平衡力系p_l^*在第一组位移u_l上所做的功。

（二）积分方程

如果b_k^*是一个作用在区域Ω内P点处k方向上的单位集中力，则

$$b_k^* = \delta_k(P) \qquad k=1,2,3 \qquad (4.21)$$

它满足下列方程

$$\sigma_{jk,j}^* + \delta_k(P) = 0 \qquad (4.22)$$

式中$\delta_k(P)$是狄拉克δ函数，即

$$\delta_k(P) = \begin{cases} \infty, & Q=P \\ 0, & Q \neq P \end{cases}$$

将式（4.21）代入式（4.20）便得下列积分方程：

$$u_k(P) = \int_{\Gamma} (p_l u_l^* - p_l^* u_l)\, d\Gamma + \int_{\Omega} b_l u_l^* d\Omega \qquad (4.23)$$

式中$u_k(P)$是区域Ω内P点处k方向上的位移；u_l^*及p_l^*都是基本解，它们分别表示P点处受k方向单位集中力作用时所产生的位移及面力。如果在三个方向上都有单位集中力作用，则式（4. 23）

便变为

$$u_k(P)=\int_{\Gamma}\left[p_l(Q_0)\,u_{kl}^*(P,Q_0)-p_{kl}^*(P,Q_0)\,u_l(Q_0)\right]\times d\Gamma(Q_0)+f_k\quad k=1,2,3\quad l=1,2,3\qquad(4.24)$$

式中 $\Gamma=\Gamma_u+\Gamma_p$

$$f_k=\int_{\Omega}b_l(Q)\,u_{kl}^*(P,Q)\,d\Omega(Q)\qquad(4.25)$$

这里Γ_u表示u_k为已知的边界部分，Γ_p表示p_k为已知的边界部分（图4.1）。u_{kl}^*及p_{kl}^*也是基本解，它们分别表示由于受k方向单位集中力作用时而在l方向产生的位移和面力（图4。2）。

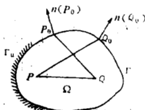


图4.1

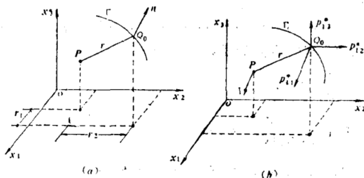


图4.2

（三）基本解

弹性力学问题的基本解 u_{kl}^* 及p_{kl}^*可以选用无限大物体P点受k方向单位集中力作用时而在Q点l方向产生的位移及面力。u_{kl}^*足下列方程：

$$D_{ijlm}\,u_{kl,mj}^*(P,Q)+\delta_{ki}\delta(P,Q)=0\qquad(4.26)$$

由式（4.26）求出 u^*_{kl} 后，利用式（4.13）即可求出 σ^*_{klj}，最后由式（4.4）可求出面力：

$$p^*_{kl} = \sigma^*_{klj} n_j \tag{4.27}$$

三维各向同性体的基本解为

$$u^*_{kl}(P,Q) = \frac{1}{16\pi G(1-\mu)r}\left[(3-4\mu)\delta_{kl} + \frac{r_k r_l}{r^2}\right] \tag{4.28}$$

$$p^*_{kl}(P,Q_0) = \frac{-1}{8\pi(1-\mu)r^2}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\mu)\delta_{kl} + \frac{3r_k r_l}{r^2}\right\} + \frac{(1-2\mu)}{r}(r_k n_l - r_l n_k)\right] \tag{4.29}$$

式中n是弹性体表面的向外法线，n_i是方向余弦；r 是从 P 点到Q点的距离，即 $r=\overline{PQ}$ 或 $r=\overline{PQ_0}$；r_i 是r 在x_i轴上的投影（图4.2）：

$$r_i = x_i(Q) - x_i(P)；\ r_i = x_i(Q_0) - x_i(P) \tag{4.30a}$$

$\partial r/\partial n$是在Q_0点的方向导数，即

$$\frac{\partial r}{\partial n} = n_i r_{,i} \tag{4.30b}$$

式中 $r_{,i} = \dfrac{\partial r}{\partial x_i(Q_0)} = r_i/r$，$r = \sqrt{r_i r_i}$

二维各向同性平面应变问题的基本解为

$$u^*_{kl}(P,Q) = \frac{1}{8\pi G(1-\mu)}\left[(3-4\mu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{kl} + \frac{r_k r_l}{r^2}\right] \tag{4.31}$$

$$p^*_{kl}(P,Q_0) = \frac{-1}{4\pi(1-\mu)r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\mu)\delta_{kl} + 2\frac{r_k r_l}{r^2}\right\} + \frac{(1-2\mu)}{r}\left(r_k n_l - r_l n_k\right)\right] \tag{4.32}$$

式中 μ 为泊松系数。对于二维各向同性平面应力问题，只要将中

(4.31)及式(4.32)中的μ用μ'代替就行了。这时

$$\mu' = \mu/(1+\mu) \tag{4.33}$$

(四)边界积分方程

如果边界Γ上的$u_l(Q_0)$及$p(Q_0)$都是已知的，则利用式(4.24)即可求出区域Ω内任一点P的位移。但在实际问题中，通常是混合问题，在边界Γ_u上位移已知，但面力未知，而在边界Γ_p上面力已知，但位移未知。因此，必须先求出边界Γ上的未知值。为此，将P点移到边界Γ上，记为P_0。当$Q_0=P_0$时，因为u^*_{kl}及p^*_{kl}有奇异性，因此P_0是一个奇异点。为了利用式(4.24)建立边界积分方程，我们在边界Γ上的P_0点作一个以P_0为中心，ε为半径的球面Γ_ε(图4.3)，其中ε为任意小的正数。这时式(4.24)便变为

$$u_k(P_0)=\int_{\Gamma-S}\Big[p_l(Q_0)u^*_{kl}(P_0,Q_0)-u_l(Q_0)p^*_{kl}(P_0,Q_0)\Big]d\Gamma(Q_0)+\int_{\Gamma_\varepsilon}\Big[p_l(Q_0)u^*_{kl}(P_0,Q_0)-u_l(Q_0)p^*_{kl}(P_0,Q_0)\Big]d\Gamma(Q_0)+\int_{\Omega+G}b_l(Q)\,u^*_{kl}(P,Q)d\Omega(Q) \tag{4.34}$$

当$\varepsilon\to 0$时，则$s\to 0$，$\Gamma_\varepsilon\to 0$，$G\to 0$。

因为可以证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}u^*_{kl}(P_0,Q_0)\times p_l(Q_0)d\Gamma(Q_0)=0 \tag{4.35}$$

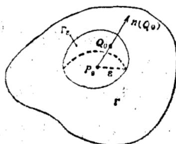


图4.3

因此，当$\varepsilon\to 0$时，式(4.34)可变为下列边界积分方程：

$$C_{kl}u_l(P_0) = \int_{\Gamma} [u_{kl}^*(P_0, Q_0)p_l(Q_0) - p_{kl}^*(P_0, Q_0)u_l(Q_0)]$$

$$\times d\Gamma(Q_0) + f_k \qquad (4.36)$$

式中 $$C_{kl} = \delta_{kl} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{kl}^*(P_0, Q_0) d\Gamma(Q_0) \qquad (4.37)$$

利用式（4.37）可以确定 C_{kl} 值。现在以弹性力学平面应变问题为例（图4.4），在边界 Γ_ε 上，因为 $r = \varepsilon$，因此

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 = \varepsilon\cos\theta & r_2 = \varepsilon\sin\theta \\ \dfrac{\partial r}{\partial n} = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 1 & r_k n_l - r_l n_k = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.38)$$

将式（4.38）代入式（4.32）便得：

$$p_{kl}^*(P_0, Q_0) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon(1-\mu)}\left[(1-2\mu)\delta_{kl} + 2r_k r_l/\varepsilon^2\right] \qquad (4.39)$$

将式（4.39）代入式（4.37）可得：

$$C_{11} = 1 + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{4\pi\varepsilon(1-\mu)} \int_0^\alpha \left[(1-2\mu) + 2\cos^2\theta\right]\varepsilon d\theta$$

$$= 1 - \frac{1}{8\pi(1-\mu)}\left[4(1-\mu)\alpha + \sin 2\alpha\right] \qquad (4.40a)$$

$$C_{12} = 0 + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{4\pi\varepsilon(1-\mu)} \int_0^\alpha 2\cos\theta\sin\theta\varepsilon d\theta$$

$$= -\frac{1}{4\pi(1-\mu)}\sin^2\alpha \qquad (4.40b)$$

同理可得：$C_{22} = C_{11}$，$C_{21} = C_{12}$

对于弹性力学平面应力问题，式（4.40）可变为

$$\left.\begin{array}{l} C_{11} = C_{22} = 1 - \dfrac{1}{4\pi}\left(2\alpha - \dfrac{1+\mu}{2}\sin 2\alpha\right) \\ C_{12} = C_{21} = -\dfrac{1+\mu}{4\pi}\sin^2\alpha \end{array}\right\} \qquad (4.41)$$

如果在P_0点处连续，则$\alpha=\pi$，因此式（4.40）及式（4.41）便变为

$$C_{kl}=\frac{1}{2}\delta_{kl} \quad (4.42)$$

利用式（4.36）可求出边界Γ上的未知值。当边界Γ上的边界未知值求出后，利用式(4.24)即可求出区域Ω内任一点P的位移$u_k(P)$。

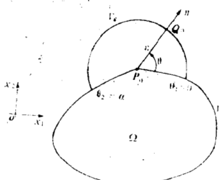


图4.4

由上述可知，弹性力学问题的边界积分方程可写成下列一般形式：

$$C_{kl}(P)u_l(P)=\int_{\Gamma}\left[u^*_{kl}(P,Q_0)p_l(Q_0)-p^*_{kl}(P,Q_0)u_l(Q_0)\right]\times d\Gamma(Q_0)+f_k \qquad k=1,2,3;\ l=1,2,3 \quad (4.43)$$

式中$C_{kl}(P)$与P点的位置有关，即

$$C_{kl}(P)=\begin{cases}\delta_{kl} & P\in\Omega\\ \frac{1}{2}\delta_{kl} & P\in\Gamma\text{且}P\text{为光滑点}\\ eq.(4.37) & P\in\Gamma\text{且}P\text{为角点}\\ 0 & P\overline{\in}(\Omega+\Gamma)\end{cases} \quad (4.44)$$

其中δ_{kl}由式（4.9）确定。

（五）域内的应力公式

对于各向同性的弹性体，将式（4.24）代入式（4.14）便得下列内点应力的计算公式：

$$\sigma_{ij}(P)=\int_{\Gamma}[D_{kij}(P,Q_0)p_k(Q_0)-S_{kij}(P,Q_0)u_k(Q_0)]$$

$$\times d\Gamma(Q_0)+\widetilde{\sigma}_{ij}(P) \tag{4.45}$$

式中 $$\widetilde{\sigma}_{ij}(P)=\int_{\Omega}D_{kij}(P,Q)b_k(Q)d\Omega(Q) \tag{4.46}$$

$$D_{kij}(P,Q_0)=A\delta_{ij}u^*_{mk,m}(P,Q_0)+G[u^*_{ik,j}(P,Q_0)+u^*_{jk,i}(P,Q_0)] \tag{4.47}$$

$$S_{kij}(P,Q_0)=A\delta_{ij}p^*_{mk,m}(P,Q_0)+G[p^*_{ik,j}(P,Q_0)+p^*_{jk,i}(P,Q_0)] \tag{4.48}$$

对于各向同性弹性体，式(4.47)及式(4.48)可变为

$$D_{kij}(P,Q_0)=\frac{1}{4\alpha\pi(1-\mu)r^{\alpha}}\left[\frac{1-2\mu}{r}(\delta_{ki}r_j+\delta_{kj}r_i-\delta_{ij}r_k)-\beta r_ir_jr_k/r^3\right] \tag{4.49}$$

$$S_{kij}(P,Q_0)=\frac{G}{2\alpha\pi(1-\mu)r^{\beta}}\Big[\beta\frac{\partial r}{\partial n}\Big(\frac{1-2\mu}{r}\delta_{ij}r_k+\frac{\mu}{r}(\delta_{ik}r_j+\delta_{jk}r_i)-\gamma r_ir_jr_k/r^3\Big)+\beta\mu(n_ir_jr_k+n_jr_ir_k)/r^2+(1-2\mu)(\beta n_kr_ir_j/r^2+n_j\delta_{ik}+n_i\delta_{jk})-(1-4\mu)n_k\delta_{ij}\Big] \tag{4.50}$$

对于三维问题，式中 $\alpha=2$，$\beta=3$，$\gamma=5$；对于二维问题，式中 $\alpha=1$，$\beta=2$，$\gamma=4$。对于平面应力问题，在式（4.49）及式（4.50）中的 μ 用 μ' 代替就行了。这时 μ' 用式（4.33）确定。

式中 r 为 P 点至 Q_0 点的距离，即

$$r=\overline{PQ_0}=\sqrt{r_ir_i} \tag{4.51}$$

$\partial r/\partial n$ 为在 Q_0 点处的方向导数，即

$$\frac{\partial r}{\partial n}=n_ir_{,i} \tag{4.52}$$

式中 $r_{,i}=r_i/r$, $r_i=x_i(Q_0)-x_i(P)$

式(4.25)及式(4.46)所示的区域积分可化为边界积分。

（六）区域积分化为边界积分的方法

式(4.25)及式(4.26)可归纳为下列形式：

$$f_k=\int_\Omega w_{kl}^*(P,Q)q_l(Q)d\Omega \tag{4.53}$$

式(4.53)可化为边界积分。下面介绍两个方法：

（1） **第一个方法**

如果 $\nabla^2 q_l(Q)=0 \qquad Q\in\Omega$ （4.54）

$\nabla^2 F_{kl}^*=w_{kl}^* \qquad Q\in\Omega$ （4.55）

则利用格林第二公式可得：

$$f_k=\int_\Gamma[q_l(Q_0)G_{kl}^*(P_0,Q_0)-F_{kl}^*(P_0,Q_0)q_{l,n}(Q_0)]d\Gamma(Q_0) \tag{4.56}$$

式中 $q_{l,n}=\partial q_l/\partial n$ （4.57）

$G_{kl}^*=\partial F_{kl}^*/\partial n$ （4.58）

其中 q_l满足式（4.54），F_{kl}^*利用式（4.55）确定。

（2） **第二个方法**

如果设

$$w_{kl}^*=G_{kl,ii}-\frac{1}{2(1-\mu)}G_{ki,il} \tag{4.59}$$

则

$$f_k=b_l\int[G_{kl,i}-\frac{1}{2(1-\mu)}G_{ki,l}]n_i d\Gamma \tag{4.60}$$

这是伽辽金张量法，见第六章。

§4.3 体力处理方法

在式（4.43）中包括体力积分。如果对体力进行积分，则必

须对整个区域进行剖分，这将使工作量大为增加。为了减少工作量，可将体力积分化为边界积分。本节介绍将体力积分化为边界积分的一个方法[1]。

弹性力学问题可归结为下列基本方法：

$$VGu_{j,ji}+Gu_{i,jj}+b_i=0 \qquad Q\in\Omega \tag{4.61}$$

$$\left.\begin{aligned} u_i&=\overline{u_i} \qquad Q\in\Gamma_u \\ p_i&=\overline{p_i} \qquad Q\in\Gamma_p \end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

式中 $V=1/(1-2\mu)$ (4.63)

现在设 $u_i=u_i^0+u_i'$ (4.64)

则式(4.61)可以变为

$$VGu'_{j,ji}+Gu'_{i,jj}+VGu^0_{j,ji}+Gu^0_{i,jj}+b_i=0 \tag{4.65}$$

如果设 $VGu^0_{j,ji}+Gu^0_{i,jj}+b_i=0$ (4.46)

则式(4.65)可以变为

$$Vu'_{j,ji}+u'_{j,jj}=0 \tag{4.67}$$

式(4.67)可以变为下列边界积分方程：

$$C_{kl}(P)u_l'(P)=\int[u^*_{kl}(P,Q_0)p_l'(Q_0) - p^*_{kl}(P,Q_0)u_l'(Q_0)]d\Gamma(Q_0) \tag{4.68}$$

式中 $u_l'=u_l-u_l^0 \qquad p_l'=p_l-p_l^0$ (4.69)

将式(4.69)代入式(4.68)便得：

$$C_{kl}(P)u_l(P)=\int_\Gamma[u^*_{kl}(P,Q_0)p_l(Q_0) - p^*_{kl}(P,Q_0)u_l(Q_0)]d\Gamma(Q_0)+f_l(P)$$
$$k=1,2,3;\ l=1,2,3 \tag{4.70}$$

式中 $f_l(P)=C_{kl}(P)u_l^0(P)-\int_\Gamma[u^*_{kl}(P,Q_0)p_l^0(Q_0)$

$$-p^*_{kl}(P, Q_0)u^0_l(Q_0)]d\Gamma(Q_0) \qquad (4.71)$$

$$p^0_l = \sigma^0_{kl}n_k \qquad (4.72)$$

u^0_k是式（4.66）的特解。如果平面应变问题的体力为

$$b_i = b_{0i} + b_{1i}x_1 + b_{2i}x_2 \qquad i=1,2 \qquad (4.73)$$

则利用式（4.66）可得：

$$\left.\begin{aligned} u^0_1 &= H(-3b_{01}x_1^2 - b_{11}x_1^3) - b_{21}\,x_2^3/6G \\ u^0_2 &= H(-3b_{02}x_2^2 - b_{22}x_2^3) - b_{12}\,x_1^3/6G \end{aligned}\right\} \qquad (4.74)$$

因此，应力 σ^0_{kl}可由下列表达式确定：

$$\left.\begin{aligned} \sigma^0_{11} &= -(b_{01}x_1 + b_{11}x_1^2/2) - J(b_{02}x_2 + b_{22}x_2^2/2) \\ \sigma^0_{22} &= -(b_{02}x_2 + b_{22}x_2^2/2) - J(b_{01}x_1 + b_{11}x_1^2/2) \\ \sigma^0_{12} &= -(b_{21}x_2^2 + b_{12}x_1^2)/2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.75)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} H &= (1-2\mu)/12G(1-\mu) \\ J &= \mu/(1-\mu) \end{aligned}\right\} \qquad (4.76)$$

对于平面应力问题，只要将式（4.76）中的μ用 $\mu/(1+\mu)$代替就行了。

如果三维问题的体力是常数，则

$$u^0_i = -b_i(1-2\mu)x_i^2/G$$

$$\sigma^0_{ij} = -4\mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)\delta_{ij} - 4(1-\mu)b_ix_i \qquad (4.77)$$

区域内任一点的应力公式为

$$\sigma_{ij}(P) = \int_\Gamma [D_{kij}(P,Q_0)p_k(Q_0)$$

$$-S_{kij}(P,Q_0)u_k(Q_0)]d\Gamma(Q_0) + \widetilde{\sigma}_{ij}(P)$$

$$i,j,k = 1,2,3 \qquad (4.78)$$

式中 $$\widetilde{\sigma}_{ij}(P)=\sigma^{0}_{ij}(P)-\int_{\Gamma}[D_{kij}(P,Q_0)p^{0}_{k}(Q_0)-S_{kij}(P,Q_0)u^{0}_{k}(Q_0)]d\Gamma(Q_0) \quad (4.79)$$

§4.4 样条边界元法

本节以弹性力学平面问题为例（图4.5）。如果将整个边界分为M部分，则式（4.36）可变为

$$C_{kl}(P_0)u_l(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,s)+f_k(P_0) \quad (4.48)$$

式中 $k=1,2 \qquad l=1,2$

$$\Pi_{km}(P_0,s)=\int_{\Gamma_m}[u^{*}_{kl}(P_0,s)p_l(s)-p^{*}_{kl}(P_0,s)u_l(s)]d\Gamma(s) \quad (4.81)$$

$$f_k(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\int[G^{*}_{kl}(P_0,s)b_l(s)-F^{*}_{kl}(P_0,s)b_{l,n}(s)]d\Gamma(s) \quad (4.82)$$

其中s是边界Γ的弧坐标。下面介绍几种具体做法：

（一）第一种方法

如果边界每个区域分为N_m个等分：

$$s_0<s_1<s_2<\cdots<s_z,\quad z=N_m$$
$$s_i=s_0+ih_m,\qquad h_m=s_{i+1}-s_i=l_m/N_m$$

则式（4.81）可变为

$$\Pi_{km}(P_0,s_i)=\sum_{i=0}^{N_m}\lambda_i[u^{*}_{kl}(P_0,s_i)p_l(s_i)-p^{*}_{kl}(P_0,s_i)u_l(s_i)]h_m \quad (4.83)$$

$$f_k(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{N_m}\lambda_i[G^*_{kl}(P_0,s_i)b_l(s_i)$$

$$-F^*_{kl}(P_0,s_j)b_{l,n}(s_i)]h_m \qquad (4.84)$$

式中 λ_i 是与数值积分法求积公式有关的系数，见第一章。P_0 在边界 Γ上，设$P_0=s_j(j=0,1,2,\cdots,N)$。

将式(4.83)及式(4.84)代入式(4.80)可得：

$$R_k(P_0)=C_{kl}(P_0)u_l(P_0)$$

$$-\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,s_i)$$

$$-f_k(P_0) \qquad (4.85)$$

式中 $R_k(P_0)$ 是边界P_0点的残数，$k,l=1,2$。由式(4.85)可得：

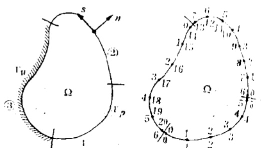


图4.5

$$\{R\}=\sum_{m=1}^{M}\Big[([H]_{1m}\{u\}_{1m}+[H]_{2m}\{u\}_{2m})-([K]_{1m}\{p\}_{1m}$$

$$+[K]_{2m}\{p\}_{2m})\Big]-\{f\} \qquad (4.86)$$

式中 $$\{f\}=\sum_{m=1}^{M}\Big[([G]_{1m}\{X_1\}_m+[G]_{2m}\{X_2\}_m)-([F]_{1m}\{X_1'\}_m$$

$$+[F]_{2m}\{X_2'\}_m)\Big] \qquad (4.87)$$

$$\{u\}_{lm}=[u_{l0}\quad u_{l1}\quad u_{l2}\quad \cdots\quad u_{lz}]^T_m$$

$$\{p\}_{lm}=[p_{l0}\quad p_{l1}\quad p_{l2}\quad \cdots\quad p_{lz}]^T_m$$

$$\{X_l\}_m=[X_l(s_0)\quad X_l(s_1)\quad \cdots\quad X_l(s_z)]^T_m$$

$$X_l'=\partial X_l/\partial n \qquad X_l=b_l \qquad (4.88)$$

$$u_{li}=u_l(s_i) \qquad p_{li}=p_l(s_i) \quad i=0,1,2,\cdots,z \tag{4.89}$$

$$[H]_{lm}=\begin{bmatrix}[H]_{1lm}\\ [H]_{2lm}\end{bmatrix} \qquad [K]_{lm}=\begin{bmatrix}[K]_{1lm}\\ [K]_{2lm}\end{bmatrix} \tag{4.90}$$

$$\left.\begin{aligned}&[H]_{klm}=[C]^{B}_{klm}+h_m[p^*]_{klm}[\lambda]_m\\ &[K]_{klm}=h_m[u^*]_{klm}[\lambda]_m,\quad k,l=1,2\end{aligned}\right\} \tag{4.91}$$

$$\left.\begin{aligned}&[u^*]_{kl}=[u^*_{kl}(s_j\ ,\ s_i)]\\ &[p^*]_{kl}=[p^*_{kl}(s_j\ ,\ s_i)]\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&i=0,1,2,\cdots,z\\ &j=0,1,2,\cdots,N\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$[\lambda]_m=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_z) \tag{4.93}$$

$$[C]_{lkm}=\mathrm{diag}(C_0,C_1,C_2,\cdots C_z)_{lk} \tag{4.94}$$

其中$[C]^{B}_{lkm}$为$[C]_{lkm}$扩大的$(N+1)(z+1)$的矩阵，$z=N_m$。如果P_0为光滑边界点，则C_{kl}为

$$C_{kl}=\frac{1}{2}\delta_{kl}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

对于有角点的边界，为了避免角点问题，我们在角点两边各布置一个点，这两个点非常接近（图4.5）。基本解$F^*(s_j,s_i)$的值可以用配点法确定，也可用下列积分式确定：

$$F^*(s_j,\ s_i)=\frac{1}{l_m}\int_{s_i-h_m/2}^{s_i+h_m/2}F^*(s_j,s)d\Gamma(s) \tag{4.95}$$

如果F^*为奇异函数，$F^*(s_i,s_i)$采用下列积分式确定：

$$F^*(s_i,s_i)=\frac{1}{l_m}\lim_{P\to s_i}\int_{s_i-h_m/2}^{s_i+h_m/2}F^*(P,s)d\Gamma(s) \tag{4.96}$$

具体计算见本章附录。式中$F^*=u^*$，p^*，G^*，F^*。

式（4.86）可写成下列形式：

$$\{R\}=[H]\{u\}-[K]\{p\}-\{f\} \tag{4.97}$$

利用配点法可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{p\}+\{f\} \tag{4.98}$$

式中 $\{u\}=[\{u\}_1^T \quad \{u\}_2^T]^T$， $\{p\}=[\{p\}_1^T \quad \{p\}_2^T]^T$

$$[H]=\left[[H]_1 \quad [H]_2\right],\ [K]=\left[[K]_1 \quad [K]_2\right] \tag{4.99}$$

$$\{u\}_k=[\{u\}_{k1}^T \quad \{u\}_{k2}^T \quad \cdots \quad \{u\}_{kM}^T]^T$$

$$\{p\}_k=[\{p\}_{k1}^T \quad \{p\}_{k2}^T \quad \cdots \quad \{p\}_{kM}^T]^T$$

$$\left.\begin{aligned}[H]_k&=\left[[H]_{k1} \quad [H]_{k2} \quad \cdots \quad [H]_{kM}\right]\\ [K]_k&=\left[[K]_{k1} \quad [K]_{k2} \quad \cdots \quad [K]_{kM}\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.100}$$

式（4.98）与边界条件有关。利用式（4.98）可求出边界未知量，但要注意引入边界条件。当边界未知量确定后，利用式（4.24）及式（4.45）的离散化格式即可求出区域内任一点的位移及应力值。利用式（4.24）可得：

$$\begin{aligned}u_k(P)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[&p_l(s_i)u_{kl}^*(P,s_i)\\ &-u_l(s_i)p_{kl}^*(P,s_i)]h_m+f_k(P)\end{aligned} \tag{4.101}$$

式中
$$\begin{aligned}f_k(P)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[&G_{kl}^*(P,s_i)b_l(s_i)\\ &-F_{kl}^*(P,s_i)b_{l,n}(s_i)]h_m\end{aligned} \tag{4.102}$$

利用式（4.45）可得：

$$\sigma_{kl}(P)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[D_{jkl}(P,s_i)p_j(s_i)-S_{jkl}(P,s_i)$$

$$\times u_j(s_i)]h_m+\tilde{\sigma}_{kl}(P) \quad j,k,l=1,2 \qquad (4.103)$$

式中 $$\tilde{\sigma}(P)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[V'_{jkl}(P,s_i)b_j(s_i)-V_{jkl}(P,s_i)$$

$$\times b'_j(s_j)]h_m \qquad (4.104)$$

$$\left.\begin{array}{ll} V'_{jkl}=\partial V_{jkl}/\partial n & b'_j=\partial b_j/\partial n \\ \nabla^2 b_j=0 & \nabla^2 V_{jkl}=D_{jkl} \end{array}\right\} \qquad (4.105)$$

式（4.101）至式（4.104）中的 u^*_{kl}、p^*_{kl}、G^*_{kl}、F^*_{kl}、D_{jkl}、S_{jkl}、V_{jkl}及V'_{jkl}可以用配点法确定，也可用式（4.95）所示的积分式进行计算。$z=N_m$。

（二）第五种方法

如果用三次B样条函数来逼近边界未知量，则

$$u_{km}(s)=[\phi(s)]\{a\}_{km}, \qquad p_{km}(s)=[\phi(s)]\{b\}_{km} \qquad (4.106)$$

式中 $$\{a\}_{km}=[u_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{z-1} \quad u_z]^T_k$$

$$\{b\}_{km}=[p_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{z-1} \quad p_z]^T_k$$

$$[\phi]=[\varphi_{se}][Q]_m \qquad (4.107)$$

$$\varphi_{se}=\varphi_s\left(\frac{s-s_0}{h_m}-e\right),\quad e=-1,0,1,2\cdots,N_m+1 \qquad (4.108)$$

$$[Q]_m=\begin{bmatrix} [g] & & 0 \\ & [I] & \\ 0 & & [h] \end{bmatrix}_{(N_m+3)(N_m+1)} \qquad (4.109)$$

$$[g]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\quad [h]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix} \tag{4.110}$$

其中$[I]$是$(N_m-3)(N_m-3)$的单位矩阵，$z=N_m$。

由式（4.106）可得：

$$\left.\begin{aligned}\{u\}_{km}&=[N]_m\{a\}_{km}\\ \{p\}_{km}&=[N]_m\{b\}_{km}\end{aligned}\right\} \tag{4.111}$$

式中 $[N]_m=[B]_m[Q]_m$ （4.112）

$$[B]_m=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1\end{bmatrix}_{(N_m+1)(N_m+3)} \tag{4.113}$$

将式（4.106）代入式（4.81）便得：

$$\Pi_{km}(P_0,s)=\left(\int_{\Gamma_m}u_{kl}^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{b\}_{lm}-\left(\int_{\Gamma_m}p_{kl}^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{a\}_m \tag{4.114}$$

如果设$P_0=s_j$（$j=0,1,2,2,\cdots,N$），则式（4.80）可变为

$$\sum_{m=1}^{M}\left([H]_{1m}\{a\}_{1m}+[H]_{2m}\{a\}_{2m}\right)=\sum_{m=1}^{M}\left([K]_{1m}\{b\}_{1m}+[K]_{2m}\{b\}_{2m}\right)+\{f\} \tag{4.115}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}[H]_{lm}&=\left[[H]_{1lm}^T\quad [H]_{2lm}^T\right]^T\\ [K]_{lm}&=\left[[K]_{1lm}^T\quad [K]_{2lm}^T\right]^T\end{aligned}\right\} \tag{4.116}$$

$$[H]_{klm}=[C]^{B}_{klm}[N]_m+[\widetilde{H}]_{klm} \quad (4.117)$$

$$\left.\begin{aligned}[K]_{klm}&=\left[\int_{\Gamma_m}u^*_{kl}(s_j,\ s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right][Q]_m\\ [\widetilde{H}]_{klm}&=\left[\int_{\Gamma}p^*_{kl}(_js,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right][Q]_m\end{aligned}\right\} \quad (4.118)$$

式（4.118）可以利用高斯求积公式计算。式（4.115）与边界条件有关，计算时必须引入边界条件。如果边界第m个区域的$p_l(s_i)=\overline{p}_l(s_i)$，则

$$[N]_m\{b\}_{lm}=\{\overline{p}\}_{lm} \quad (4.119)$$

因此由上述可知：

$$[K]_{lm}\{b\}_{lm}=[K_0]_{lm}\{\overline{p}\}_{lm} \quad (4.120)$$

式中 $$[K_0]_{lm}=\left[[K_0]_{1lm}\quad [K]_{2lm}\right] \quad (4.121)$$

$$[K_0]_{klm}=h_m[u^*]_{klm}[\lambda]_m \quad k,l=1,2 \quad (4.122)$$

$$[u^*]_{kl}=[u^*_{kl}(s_j,s_i)] \quad (4.123)$$

式中 $u^*_{kl}(s_j,\ s_i)$可以用式（4.95）或式（4.96）进行计算，这时$F^*=u^*_{kl}$。$i=0,1,2,\cdots,z$；$j=0,1,2,\cdots,N$。

如果边界第m个区域的$u_l(s_i)=\overline{u}_l(s_i)$，则

$$[N]_m\{a\}_{lm}=\{\overline{u}\}_{lm} \quad (4.124)$$

因此由上述可知：

$$[H]_{lm}\{a\}_{lm}=[H_0]_{lm}\{\overline{u}\}_{lm} \quad (4.125)$$

式中 $$\left.\begin{aligned}[H_0]_{lm}&=\left[[H_0]_{1lm}\quad [H_0]_{2lm}\right]\\ [H_0]_{klm}&=[C]^{B}_{klm}[N]_m+h_m[p^*]_{klm}[\lambda]_m\\ [p^*]_{kl}&=[p^*_{kl}(s_j,s_i)] \quad k,l=1,2\end{aligned}\right\} \quad (4.126)$$

式中 $p_{kl}^*(s_j, s_i)$可以用式（4.95)或式（4.96）进行计算，这时

$F^* = p_{kl}^*$ 。

如果边界第m个区域的$u_1(s_i)=\overline{u_1}(s_i)$，$p_2(s_i)=\overline{p}(s_i)$，则

$$[N]_m\{a\}_{1m}=\{\overline{u}\}_{1m},\quad [N]_m\{b\}_{2m}=\{\overline{p}\}_{2m} \qquad (4.127)$$

如果边界第m个区域的 $u_2(s_i)=p_1(s_i)=0$，则

$$\{a\}_{2m}=\{b\}_{1m}=\{0\}$$

当引入边界条件后，则式（4.115）可变为

$$[A]\{X\}=\{F\} \qquad (4.128)$$

式中$[A]$、$\{X\}$及$\{F\}$与边界条件有关。例如，对于图4.6所示的混合边界问题（在整个边界Γ上，一部分位移为已知，另一部分面力为已知），则式（4.115）可变为

$$[A]_1\{X\}_1+[A]_2\{X\}_2=\{F\} \qquad (4.129)$$

式中 $$\{F\}=[A]_3\{\overline{X}\}_3+[A]_4\{\overline{X}\}_4+\{f\} \qquad (4.130)$$

$$\{X\}_1=[\{a\}_{11}^T\quad \{b\}_{12}^T\quad \{a\}_{13}^T\quad \{b\}_{14}^T]^T$$

$$\{X\}_2=[\{a\}_{21}^T\quad \{b\}_{22}^T\quad \{a\}_{23}^T\quad \{b\}_{24}^T]^T$$

$$\{\overline{X}\}_3=[\{\overline{p}\}_{11}^T\quad \{\overline{u}\}_{12}^T\quad \{\overline{p}\}_{13}^T\quad \{\overline{u}\}_{14}^T]^T$$

$$\{\overline{X}\}_4=[\{\overline{p}\}_{21}^T\quad \{\overline{u}\}_{22}^T\quad \{\overline{p}\}_{23}^T\quad \{\overline{u}\}_{24}^T]^T$$

$$\left.\begin{aligned}[A]_1&=\Big[[H]_{11}\quad -[K]_{12}\quad [H]_{13}\quad -[K]_{14}\Big]\\ [A]_2&=\Big[[H]_{21}\quad -[K]_{22}\quad [H]_{23}\quad -[K]_{24}\Big]\end{aligned}\right\} \qquad (4.131)$$

$$\left.\begin{aligned}[A]_3&=\Big[-[K_0]_{11}\quad [H_0]_{12}\quad -[K_0]_{13}\quad [H_0]_{14}\Big]\\ [A]_4&=\Big[-[K_0]_{21}\quad [H_0]_{22}\quad -[K_0]_{23}\quad [H_0]_{24}\Big]\end{aligned}\right\}$$

(4.132)

由式（4.129）可得式（4.128）。这时$\{F\}$由式（4.130）确定，而$\{X\}$及$[A]$由下列公式确定：

$$\{X\}=[\{X\}_1^T \quad \{X\}_2^T]^T$$

$$[A]=\Big[[A]_1 \quad [A]_2\Big]$$

对于其他边界条件，可以仿照上述做法引入边界条件。利用式（4.128）求出$\{X\}$后，即可利用式（4.111）求出边界未知量。

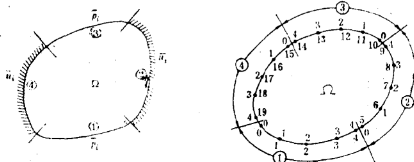


图 4.6

（三）第三种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则

$$u_l(s)=\sum_{i=0}^{z}u_{li}\phi_i(s), \quad p_l(s)=\sum_{i=0}^{z}p_{li}\phi_i(s) \quad (4.133)$$

式中中$z=N_m$，$\phi_i(s)$采用第一章式（1.27）的形式；$u_{li}=u_l(s_i)$，$p_{li}=p_l(s_i)$。将式（4.133）代入式（4.81）可得：

$$\Pi_{km}(P_0,s)=\sum_{i=0}^{z}\Big[\Big(\int_{\Gamma_m}u_{kl}^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)p_l(s_i)$$

$$-\Big(\int_{\Gamma_m}p_{kl}^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)u_l(s_i)\Big] \quad (4.134)$$

将式（4.134）代入式（4.80）可得：

$$\sum_{m=1}^{M}\left[\left([H]_{1m}\{u\}_{1m}+[H]_{2m}\{u\}_{2m}\right)-\left([K]_{1m}\{p\}_{1m}+[K]_{2m}\{p\}_{2m}\right)\right]=\{f\} \tag{4.135}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&[H]_{lm}=\left[[H]^T_{1lm}\quad [H]^T_{2lm}\right]^T\\&[K]_{lm}=\left[[K]^T_{1lm}\quad [K]^T_{2lm}\right]^T\\&[H]_{klm}=[C]^B_{klm}+[\widetilde{H}]_{klm}\end{aligned}\right\} \tag{4.136}$$

$$\left.\begin{aligned}&[\widetilde{H}]_{klm}=[\widetilde{H}_{ji}]_{klm}\quad i=0,1,2,\cdots,N_m\\&[K]_{klm}=[K_{ji}]_{klm}\quad j=0,1,2,\cdots,N\end{aligned}\right\} \tag{4.137}$$

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{H}_{ji}=\int_{\Gamma_m}p^*_{kl}(s_j,s)\phi_i(s)d\Gamma(s)\\&K_{ji}=\int_{\Gamma_m}u^*_{kl}(s_j,s)\phi_i(s)d\Gamma(s)\end{aligned}\right\} \tag{4.138}$$

式（3.138）可以用高斯求积公式进行计算。由式（4.135）可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{p\}+\{f\} \tag{4.139}$$

利用式（4.139）可求出边界未知量。

当边界未知量确定后，利用式（4.24）及式（4.45）的离散格式可确定域内任一点P的位移及应力值。

§4.5 域外奇点样条边界元法

如果P点在区域$(\Omega+\Gamma)$外，则$C_{kl}(P)=0$。因此式（4.80）便变为

$$\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P,s)+f_k(P)=0 \tag{4.140}$$

我们可以利用式（4.140）来建立样条边界元法的计算格式。这种方法称为域外奇点样条边元法，可以完全避免边界奇异积分。

为了建立域外奇点样条边界元法的计算格式，我们围绕着实际边界在域（$\Omega+\Gamma$）外构造一个与实际边界Γ几何形状相似的虚边界Γ^*（图4.7）。虚边界Γ^*上的结点与实际边界Γ上的结点一一对应，在对应的边界点上有相同的法向。P在虚边界Γ^*上（图4.7）。

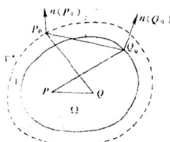


图4.7

（一）第一种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分（图4.8），则式（4.140）可变为

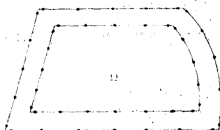


图4.8

$$R_k(P)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P,s_i)+f_k(P) \tag{4.141}$$

式中 $$\Pi_{km}(P,s_i)=\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[u_{kl}^*(P,s_i)p_l(s_i)-p_{kl}^*(P,s_i)u_l(s_i)]h_m \tag{4.142}$$

$$f_k(P)=-\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[u_{ki}^*(P,s_i)p_i^0(s_i)$$

$$-p_{ki}^*(P,s_i)u_i^0(s)]h_m \tag{4.143}$$

设 $P=s_j$（$j=0,1,2,\cdots,N$），则式（4.141）可变为

$$\{R\}=\sum_{m=0}^{M}\Big([K]_{1m}\{p\}_{1m}+[K]_{2m}\{p\}_{2m}-[\widetilde{H}]_{1m}\{u\}_{1m}$$

$$-[\widetilde{H}]_{2m}\{u\}_{2m}\Big)+\{f\} \tag{4.144}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}[\widetilde{H}]_{lm}&=\Big[[\widetilde{H}]_{1lm}^T\quad[\widetilde{H}]_{2lm}^T\Big]^T\\ [K]_{lm}&=\Big[[K]_{1lm}^T\quad[K]_{2lm}^T\Big]^T\end{aligned}\right\} \tag{4.145}$$

$$\left.\begin{aligned}[\widetilde{H}]_{klm}&=h_m[p^*]_{klm}[\lambda]_m\\ [K]_{klm}&=h_m[u^*]_{klm}[\lambda]_m\end{aligned}\right\} \tag{4.146}$$

$$\{f\}=-\sum_{m=1}^{M}\Big([K]_{1m}\{p^0\}_{1m}+[K]_{2m}\{p^0\}_{2m}$$

$$-[\widetilde{H}]_{1m}\{u^0\}_{1m}-[\widetilde{H}]_{2m}\{u^0\}_{2m}\Big) \tag{4.147}$$

$$\{u^0\}_{lm}=[u_l^0(s_0)\quad u_l^0(s_1)\quad\cdots\quad u_l^0(s_z)]^T$$

$$\{p^0\}_{lm}=[p_l^0(s_0)\quad p_l^0(s_1)\quad\cdots\quad p_l^0(s_z)]^T$$

其中 $z=N_m$

利用配点法可得：

$$\sum_{m=1}^{M}\Big([\widetilde{H}]_{1m}\{u\}_{1m}+[\widetilde{H}]_{2m}\{u\}_{2m}\Big)=\sum_{m=1}^{M}\Big([K]_{1m}\{p\}_{1m}$$

$$+[K]_{2m}\{p\}_{2m}\Big)+\{f\} \tag{4.148}$$

利用式（4.148）可求出边界未知量。

（二）第三种方法

如果将边界 Γ_m 分为 N_m 等分，则 $u_l(s)$ 及 $p_l(s)$ 可采用式（4.133）表示。将式（4.133）代入式（4.140）可得：

$$\sum_{m=1}^{M}\left[\left([\widetilde{H}]_{1m}\{u\}_{1m}+[\widetilde{H}]_{2m}\{u\}_{2m}\right)-\left([K]_{1m}\{p\}_{1m}-[K]_{2m}\{p\}_{2m}\right)\right]=\{f\} \tag{4.149}$$

式中 $[\widetilde{H}]_{lm}$ 及 $[K]_{lm}$ 可用式（4.136）～式（4.138）确定，但 $[C]^B_{klm}=[0]$。利用式（4.149）可求出边界未知量。

（三）第五种方法

如果边界未知量用式（4.106）表示，则式（4.140）可变为

$$\sum_{m=1}^{M}\left([\widetilde{H}]_{1m}\{a\}_{1}+[\widetilde{H}]_{2m}\{a\}_{2m}\right)=\sum_{m=1}^{M}\left([K]_{1m}\{b\}_{1m}+[K]_{2m}\{b\}_{2m}\right)+\{f\} \tag{4.150}$$

式中 $[\widetilde{H}]_{lm}$ 及 $[K]_{lm}$ 可用式（4.116）～式（4.118）确定，但 $[C]^B_{klm}=[0]$。利用式（4.150）求出 $\{a\}_{lm}$ 及 $\{b\}_{lm}$ 后，即可利用式（4.111）确定边界未知量。

式(4.150)与边界条件有关。引入边界条件后，则式(4.150)便变为

$$[A]\{X\}=\{F\} \tag{4.151}$$

或

$$[G]\{X\}=\{P\} \tag{4.152}$$

式中 $[G]=[A]^T[A]$，

$$\{P\}=[A]^T\{F\} \tag{4.153}$$

利用上述计算格式可求出边界未知量。当边界未知量确定后，利用式（4.70）及式（4.78）的离散化格式即可求出域内任

一点的位移及应力值。

§4.6 工程应用中的几个问题

（一）无限域问题

在工程（例如：大坝，隧洞，矿井，地下建设物）设计中常常遇到无限域问题。图 4.9 是一个平面开孔无限域，设体力为零（$b_l=0$），则它的边界积分方程为

$$
\begin{aligned}
C_{kl}(P)u_l(P) = & \int_{\Gamma_2}[u^*_{kl}(P,Q_0)p_l(Q_0) - p^*_{kl}(P,Q_0) \\
& \times u_l(Q_0)d\Gamma + \int_{\Gamma_1}[u^*_{kl}(P,Q_0)p_l(Q_0) \\
& - p^*_{kl}(P,Q_0)u_l(Q_0)]d\Gamma \qquad (4.154)
\end{aligned}
$$

当$\Gamma_1 \to \Gamma_\infty$时，可以证明：

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Gamma_1 \to \Gamma_\infty} & \int_{\Gamma_1}[u^*_{kl}(P,Q_0)p_l(Q_0) \\
& - p^*_{kl}(P,Q_0)u_l(Q_0)]d\Gamma = 0 \qquad (4.155)
\end{aligned}
$$

因此，式（4.154）可以变为

$$
\begin{aligned}
& C_{kl}(P)u_l(P) \\
& = \int_{\Gamma_2}[u^*_{kl}(P,Q_0)p_l(Q_0) \\
& - p^*_{kl}(P,Q_0)u_l(Q_0)]d\Gamma \qquad (4.156)
\end{aligned}
$$

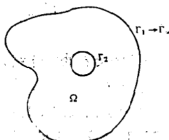


图4.9

式（4.156）对于全空间、半空间、全平面、半平面及楔形体等任何无限域问题都适用，只是基本解不同而已。

（二）子域法应用

一个区域可以分为几个子域来计算。对于下列问题可以分为几个子域进行计算。

（1） 当计算区域的材料包含几种材料时，可以将整个区域分为几个子域，使得每个子域只含一种材料。

（2） 当体力分区为常数时，为了将体力化为面力，可以将整个区域分为几个子域，使得每个子域的体力为常数。

（3） 当区域过分狭长时，为了使计算结果有足够的精确度，可将整个区域分为几个较短的子域。

（4） 当物体内有夹杂问题，可以分域进行计算。

本节以二维问题为例（图4.10），将它分为两个子域。对于第一个子域，有

$$[H_1 \quad H_{1a}]\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_{2a} \end{Bmatrix} = [K_1 \quad K_{1a}]\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_{1a} \end{Bmatrix} + \{f\}_1 \tag{4.157}$$

对于第二个子域，有

$$[H_2 \quad H_{2a}]\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_{2a} \end{Bmatrix} = [K_2 \quad K_{2a}]\begin{Bmatrix} P_2 \\ P_{2a} \end{Bmatrix} + \{f\}_2 \tag{4.158}$$

利用两个子域交界处的连续条件，可得：

$$U_{2a} = U_{1a} = U_a; \quad P_{2a} = -P_{1a} = P_a. \tag{4.159}$$

将式（4.159）代入式（4.158）可得：

$$[H]_1\{U\}_1 = [K]_1\{P\}_1 + \{f\}_1 \tag{4.160}$$

$$[H]_2\{U\}_2 = [K]_2\{P\}_2 + \{f\}_2 \tag{4.161}$$

式中 $\{U\}_i = [U_i \quad U_a]^T$，$\{P\}_i = [P_i \quad P_a]^T$

$[H]_i = [H_i \quad H_{ia}]$，$[K]_1 = [K_1 \quad -K_{1a}]$

$$[K]_2=[K_2 \quad K_{2a}]$$

利用先扩张后叠加的办法，将每个子域的$[H]_i$及$[K]_i$在叠体编号下叠加：

$$[H]=\sum_{i=1}^{2}[H]_i \qquad [K]=\sum_{i=1}^{2}[K]_i \tag{4.162}$$

由式（4.160）及式（4.161）可得：

$$[H]\begin{Bmatrix} U \\ U_A \end{Bmatrix}=[K]\begin{Bmatrix} P \\ P_A \end{Bmatrix}+\{f\} \tag{4.163}$$

由式（4.163）可得：

$$\begin{Bmatrix} P \\ P_A \end{Bmatrix}=[K]^{-1}[H]\begin{Bmatrix} U \\ U_A \end{Bmatrix}-[K]^{-1}\{f\} \tag{4.164}$$

另外，由式（4.164）可得：

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ P_a \end{Bmatrix}=[G]_2\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_a \end{Bmatrix}-\{\overline{f}\} \tag{4.165}$$

式中 $[G]_2=[K]_2^{-1}[H]_2$，$\{\overline{f}\}_2=[K]_2^{-1}\{f\}_2$ （4.166）

将式（4.165）在整体编号下扩大，并划去P_2及$[G]$和$\{\overline{f}\}$中与P_2对应的行，便得：

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P_A \end{Bmatrix}=[G]\begin{Bmatrix} U \\ U_A \end{Bmatrix}-\{\overline{f}\} \tag{4.167}$$

将式（4.164）减去式（4.167）可得：

$$[A]\begin{Bmatrix} U \\ U_A \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}+\{F\} \tag{4.168}$$

式中 $[A]=[K]^{-1}[H]-[G]$ （4.169）

$$\{F\}=[K]^{-1}\{f\}-\{\overline{f}\} \tag{4.170}$$

式（4.168）与边界条件有关。引入边界条件后，由式（4.168）可求出U、U_A及P；将U及U_A代入式（4.167）可求出P_A。

上述方法对多个子域都适用。这时

$$[H]_i\{U\}_i=[K]_i\{P\}_i+\{f\}_i \quad i=1,2,3,\cdots \tag{4.172}$$

对于分域计算的边界元法，还可以利用矩阵转移法进行计算。

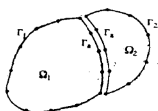


图4.10

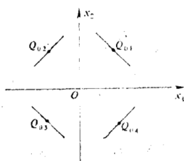


图4.11

（三）对称性利用

图4.11是一个轴对称问题，边界Γ的位移及面力有下列关系：

$$\left.\begin{aligned}
&u_1(Q_{02})=-u_1(Q_{01}), \quad u_2(Q_{02})=u_2(Q_{01})\\
&u_1(Q_{03})=-u_1(Q_{01}), \quad u_2(Q_{03})=-u_2(Q_{01})\\
&u_1(Q_{04})=u_1(Q_{01}), \quad u_2(Q_{04})=-u_2(Q_{01})\\
&p_1(Q_{02})=-p_1(Q_{01}), \quad p_2(Q_{02})=p_2(Q_{01})\\
&p_1(Q_{03})=-p_1(Q_{01}), \quad p_2(Q_{03})=-p_2(Q_{01})\\
&p_1(Q_{04})=p_1(Q_{01}), \quad p_2(Q_{04})=p_2(Q_{01})
\end{aligned}\right\} \tag{4.173}$$

式中Q_{0i}为第i象限的边界上的任一点，它们都是对称关系。于是对于图4.11只须在第一象限进行计算。将式（4.173）代入边界

积分方程便得：

$$
\begin{aligned}
C_{kl}(P)u_l(P)=\int_{\Gamma_1}[U_{kl}(P,Q_0)p_l(Q_0)\\
-P_{kl}(P,Q_0)u_l(Q_0)]d\Gamma\\
+\int_{\Omega_1}u^*_{kl}(P,Q)b_l(Q)d\Omega
\end{aligned}
\tag{4.174}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
U_{k1}(P,Q_0)=u^*_{k1}(P,Q_{01})-u^*_{k1}(P,Q_{02})\\
-u^*_{k1}(P,Q_{03})+u^*_{k1}(P,Q_{04})\\
U_{k2}(P,Q_0)=u^*_{k2}(P,Q_{01})+u^*_{k2}(P,Q_{02})\\
-u^*_{k2}(P,Q_{03})-u^*_{k2}(P,Q_{04})
\end{aligned}\right\}
\tag{4.175}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
P_{k1}(P,Q_0)=p^*_{k1}(P,Q_{01})-p^*_{k1}(P,Q_{02})\\
-p^*_{k1}(P,Q_{03})+p^*_{k1}(P,Q_{04})\\
P_{k2}(P,Q_0)=p^*_{k2}(P,Q_{01})+p^*_{k2}(P,Q_{02})\\
-p^*_{k2}(P,Q_{03})+p^*_{k2}(P,Q_{04})
\end{aligned}\right\}
\tag{4.176}
$$

由上述可知，对于图4.11所示的对称问题，只须在第Ⅰ象限边界离散就行了（图4.12），大大节省计算机的存贮量及计算时间。

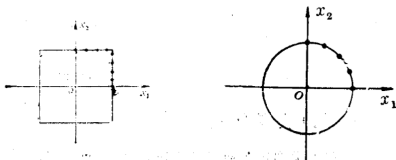


图4.12

（四）边界上的应力公式

若图4.13是边界点上的一个局部坐标系，A是一个应力点，$\overline{x}_3 = n$，则

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_{11} = \frac{1}{1-\mu}\left[\mu\overline{\sigma}_{33} + 2G(\overline{\varepsilon}_{11} + \mu\overline{\varepsilon}_{22})\right] \\
&\overline{\sigma}_{12} = 2G\overline{\varepsilon}_{12} \\
&\overline{\sigma}_{22} = \frac{1}{1-\mu}\left[\mu\overline{\sigma}_{33} + 2G(\overline{\varepsilon}_{22} + \mu\overline{\varepsilon}_{11})\right] \\
&\overline{\sigma}_{k3} = \overline{p}_k \qquad k=1,2,3
\end{aligned}\right\} \tag{4.177}$$

式中 $\overline{\varepsilon}_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\overline{u}_{j,i} + \overline{u}_{i,j}\right) \qquad i,j=1,2$ （4.178）

若图4.14是一个平面应变问题，则

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_{11} = \frac{1}{1-\mu}\left(\mu\overline{\sigma}_{22} + 2G\overline{\varepsilon}_{11}\right) \\
&\overline{\sigma}_{k2} = \overline{p}_k \qquad k=1,2
\end{aligned}\right\} \tag{4.179}$$

式中 $\overline{\varepsilon}_{11} = \partial u_1 / \partial x_1$ （4.180）

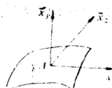


图4.13

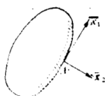


图4.14

（五）夹层问题

在工程中常遇到各种形式的软弱夹层（图4.15），这些夹层对工程的安全经济及快速施工问题都有很大的影响。因此，研究这

些夹层问题的应力计算方法具有非常重要的意义。

利用边界元法计算含有夹层的工程结构，如果用一般做法，则工作量很大，因此需要改进。如何改进呢？这是一个需要进一步研究的课题。目前可以采用下列方法：（1）第一种方法可用耦合法，例如有限元——边界元法，狭长的夹层用有限元法，其余用边界元法，然后离散；（2）第二种方法可用位移不连续法，实际上这是利用虚拟位移建立的边界间接法；（3）第三种方法可用下列方法。

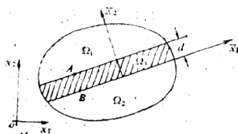


图4.15

设夹层为等厚度而且狭长，由于夹层厚度很小，应力沿厚度方向变化甚微，可以认为夹层应力沿厚度不变，而且可用夹层边界的相对位移确定：

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{12} &= G(\overline{u}_{1A}-\overline{u}_{1B})/d \\
\overline{\sigma}_{22} &= E(\overline{u}_{2A}-\overline{u}_{2B})/d
\end{aligned}
\qquad (4.181)
$$

式中$\overline{u}_{iA}$及$\overline{u}_{iB}$分别为节点A及节点B的位移$\overline{u}_i$，它们都对应于局部坐标；d为夹层的厚度。

在局部坐标中，因为$\overline{p}_i=\overline{\sigma}_{ij}n_j$，因此有

$$
\begin{aligned}
\overline{p}_{1A}(\Omega_3) &= G(\overline{u}_{1A}-\overline{u}_{1B})/d \\
\overline{p}_{2A}(\Omega_3) &= E(\overline{u}_{2A}-\overline{u}_{2B})/d
\end{aligned}
\qquad (4.182)
$$

$$
\overline{p}_{iB}(\Omega_3) = -\overline{p}_{iA}(\Omega_3) \qquad (4.183)
$$

在整体坐标中，可以建立下列关系：

$$
p_{iA}=a_{ij}\overline{p}_{jA} \qquad (4.184)
$$

$$\overline{u}_{iA}=\beta_{ij}u_{jA}, \qquad \overline{u}_{iB}=\beta_{ij}u_{jB} \tag{4.185}$$

式中 $\alpha_{ij}=\cos(x_i,\overline{x}_j)$，$\beta_{ij}=\cos(\overline{x}_i,x_j)$

将式（4.182）代入式（4.184）并考虑式（4.185）可得：

$$p_{iA}(\Omega_3)=\gamma^j\alpha_{ij}\beta_{jk}(u_{kA}-u_{kB}) \tag{4.186}$$

式中 $\gamma^j=G[(1+2\mu)j-2\mu]/d$ （4.187）

利用面力的连续条件可得：

$$\begin{aligned} p_{iA}(\Omega_1)&=-p_{iA}(\Omega_3) \\ p_{iB}(\Omega_2)&=-p_{iB}(\Omega_3)=p_{iA}(\Omega_3) \end{aligned} \tag{4.188}$$

由此可得：

$$p_{iA}(\Omega_1)=-p_{iB}(\Omega_2) \tag{4.189}$$

式中

$$\begin{aligned} p_{iA}(\Omega_1)&=\gamma^j\alpha_{ij}\beta_{jk}(u_{kB}-u_{kA}) \\ p_{iB}(\Omega_2)&=\gamma^j\alpha_{ij}\beta_{jk}(u_{kA}-u_{kB}) \end{aligned} \tag{4.190}$$

利用式（4.189）或式（4.190）与边界积分方程的离散化格式一起，可以求出含夹层的问题的位移和应力。这种做法比较灵活，不仅计算简便，而且精确度也满足工程上的要求。

§4.7 三维问题

关于三维问题的样条边界元法，第三章已经介绍，本节主要介绍它在弹性力学问题中的应用。

对于三维问题，边界元法只对整个物体表面剖分为单元。常见的边界元有两类：三角形单元和四边形单元。本节采用四边形单元，它的坐标变换公式为

$$x=\sum_{k=1}^{L}N_kx_k,\qquad y=\sum_{k=1}^{L}N_ky_k,\qquad z=\sum_{k=1}^{L}N_kz_k \tag{4.119}$$

详见第三章§3.7。下面介绍样条边界元法的两种具体方法：

（一）第一种方法

如果将边界分为M个边界区域，则边界积分方程变为

$$C_{kl}(P_0)u_l(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,Q_0)+f_k(P_0) \quad (4.192)$$

式中 $\Pi_{km}(P_0,Q_0)=\int_{\Gamma_m}[u^*_{kl}(P_0,Q_0)p_l(Q_0)$

$$-p^*_{kl}(P_0,Q_0)u(Q)]d\Gamma \quad (4.193)$$

$$f_k(P_0)=\int_{\Omega}u^*_{kl}(P_0,Q_0)b_l(Q_0)d\Omega \quad k=1,2,3 \quad (4.194)$$

式（4.194）可化为边界积分，见式（4.60）及式（4.71）。

在式（4.191）所示的坐标变换下，$d\Gamma$及$d\Omega$可变为

$$d\Gamma=|A|d\xi d\eta,\ d\Omega=|J|d\xi d\eta d\zeta \quad (4.195)$$

式中ζ沿曲面法向，垂直ξ及η；$|A|$由式（3.156）确定；$|J|$为雅可比矩阵的行列式，J为雅可比矩阵，即

$$J=\begin{matrix} x_{1,\xi} & x_{2,\xi} & x_{3,\xi} \\ x_{1,\eta} & x_{2,\eta} & x_{3,\eta} \\ x_{1,\zeta} & x_{2,\zeta} & x_{3,\zeta} \end{matrix}$$

经过坐标变换后，式（4.193）及式（4.60）可变

$$\Pi_{km}(P_0,Q_0)=\int_{\Gamma_m}[u^*_{kl}(P_0,Q_0)p_l(Q_0)$$

$$-p^*_{kl}(P_0,Q_0)u_l(Q_0)]|A|d\xi d\eta$$

$$(4.197)$$

$$f_k(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi^0_{km}(P_0,Q_0) \quad (4.198)$$

$$\Pi_{km}^{e}(P_0,Q_0)=\int_{\Gamma_m} b_l[G_{kl,e}(P_0,Q_0)$$

$$-\frac{1}{2(1-\mu)}G_{ke,l}(P_0,Q_0)]n_e|A|d\xi d\eta$$

(4.199)

式中 $k,l,e=1,2,3$；$Q_0=(\xi,\eta)$

$$\int_{\Gamma_m}=\int_0^1\int_0^1$$

如果将每个边界区域沿ξ方向分为N_m等分，沿η方向分为M_m等分（图3.15），则式（4.197）及式（4.199）便变为

$$\Pi_{km}(P_0,\xi_i,\eta_j)=\sum_{i=0}^{N_m}\sum_{j=0}^{M_m}\lambda_i\lambda_j[u_{kl}^*(P_0,\xi_i,\eta_j)p_l(\xi_i,\eta_j)$$

$$-p_{kl}^*(P_0,\xi_i,\eta_j)u_l(\xi_i,\eta)]|A|h_{1m}h_{2m}$$

（4.200）

$$\Pi_{km}^{e}(P_0,\xi_i,\eta_j)=\sum_{i=0}^{N_m}\sum_{j=0}^{M_m}\lambda_i\lambda_j b_l[G_{kl,e}(P_0,\xi_i,\eta_j)$$

$$-\frac{1}{2(1-\mu)}G_{ke,l}(P_0,\xi_i,\eta_j)]n_e|A|h_{1m}h_{2m}$$

（4.201）

式中λ_i及λ_j是与数值积分法求积公式有关的系数，见第一章。$h_{1m}=1/N_m$，$h_{2m}=1/M_m$。

将式（4.200）及式（4.201）代入式（4.192）可得：

$$C_{kl}(P_0)u_l(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,\xi_i,\eta_j)-f_k(P_0)\quad(4.202)$$

由式（4.202）可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{p\}+\{f\}\qquad(4.203)$$

式中 $\{u\}=[\{u\}_1^T\quad\{u\}_2^T\quad\{u\}_3^T]^T$

$\{p\}=[\{p\}_1^T\quad\{p\}_2^T\quad\{p\}_3^T]^T$

$$\left.\begin{aligned}[H]&=\Big[[H]_1 \quad [H]_2 \quad [H]_3\Big]\\ [K]&=\Big[[K]_1 \quad [K]_2 \quad [K]_3\Big]\end{aligned}\right\} \tag{4.204}$$

其中 $\{u\}_l=[\{u\}_{l1}^T \quad \{u\}_{l2}^T \quad \cdots \quad \{u\}_{lM}^T]^T$

$\{p\}_l=[\{p\}_{l1}^T \quad \{p\}_{l2}^T \quad \cdots \quad \{p\}_{lM}^T]^T$

$$\left.\begin{aligned}[H]_l&=\Big[[H]_{l1} \quad [H]_{l2} \quad \cdots \quad [H]_{lM}\Big]\\ [K]_l&=\Big[[K]_{l1} \quad [K]_{l2} \quad \cdots \quad [K]_{lM}\Big]\end{aligned}\right\} \tag{4.205}$$

式中 $\{u\}_{lm}=[u_{l0} \quad u_{l1} \quad u_{l2} \quad \cdots \quad u_{lr}]_m^T$

$\{p\}_{lm}=[p_{l0} \quad p_{l1} \quad p_{l2} \quad \cdots \quad p_{lr}]_m^T$

$[H]_{lm}=\Big[[H]_{1lm}^T \quad [H]_{2lm}^T \quad [H]_{3lm}^T\Big]^T$

$[K]_{lm}=\Big[[K]_{1lm}^T \quad [K]_{2lm}^T \quad [K]_{3lm}^T\Big]^T$

$[H]_{klm}=[C]_{klm}^B+h_{1m}h_{2m}[p^*]_{klm}[s]_m[\lambda]_m$

$[K]_{klm}=h_{1m}h_{2m}[u^*]_{klm}[s]_m[\lambda]_m$

$$[u^*]_{kl}=[u_{kl}^*(P_\alpha,\overline{Q}_t)], \quad [p^*]_{kl}=[p_{kl}^*(P_\alpha,\overline{Q}_t)] \tag{4.206}$$

式中 $\alpha=0,1,2,\cdots,N$； $t=0,1,2,\cdots,r$。式(4.206)可以用配点法确定，也可用第三章式（3.220）所示的积分式确定。其余记号见§3.7。利用式（4.203）可求出边界未知量。

$r=(N_m+1)(M_m+1)$。

（二）第二种方法

如果边界未知量用三次B样条函数逼近，则

$$
\left.\begin{aligned}
u_i(Q_0) &= \sum_{i=0}^{N_m}\sum_{j=0}^{M_m} u_{\cdot kjm}\phi_i(\xi)\psi_j(\eta) \\
p(Q_0) &= \sum_{i=0}^{N_m}\sum_{j=0}^{M_m} p_{lijm}\phi_i(\xi)\psi_j(\eta)
\end{aligned}\right\} \tag{4.207}
$$

式中 $u_{lijm} = u_{lm}(\xi_i, \eta_j)$， $p_{lijm} = p_{lm}(\xi_i, \eta_j)$

$\phi_i(\xi)$ 及 $\psi_j(\eta)$ 为三次 B 样条函数构成的基函数，可采用第一章式（1.27）所示的形式；$Q_0 = (\xi, \eta)$；将式（4.207）代入式（4.192）可得：

$$
\begin{aligned}
& C_{kl}(P_0)u_l(P_0) \\
&= \sum_{m=1}^{M}\left[\sum_{t=0}^{r}\left(\int_{\Gamma_m} u_{kl}^*(P_0, Q_0)N_t(\xi,\eta)|A|d\xi d\eta\right)p_{tm}\right. \\
&\quad \left. - \sum_{t=0}^{r}\left(\int_{\Gamma_m} p_{kl}^*(P_0, Q_0)N_t(\xi,\eta)|A|d\xi d\eta\right)u_{tm}\right] \\
&\quad + f_k(P_0) \quad k, l = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{4.208}
$$

设 $P_0 = P_\alpha(\alpha = 0, 1, 2, \cdots, N)$，则式（4.208）可变为

$$
[H]\{u\} = [K]\{p\} + \{f\} \tag{4.209}
$$

利用式（4.209）确定边界未知量后，即可利用式（4.43）及式（4.45）可求出域内的位移值及应力值。

§4.8 地应力问题

岩体中的初始地应力是地质年代中历次构造运动的产物，它的分布状态及大小直接影响着地下工程的设计及施工。因此，岩体初始地应力场问题是一个很有意义的研究课题。

岩体地应力场问题是一个复杂的问题，精确地求解它的分布状态和大小非常困难。目前的一般做法是：首先对现场进行观

测，确定一些点的实测应力值；然后根据这些点的实测应力值，利用有限元法或边界元法求解整个地应力场的近似值。实践证明，利用边界元法求解地应力场比有限元法优越。

目前利用边界元法求解地应力场有两种主要具体方法：（1）边界元回归法，先假设一组水平力作为初拟构造力，利用边界元法求出初拟构造力的值；其次利用回归分析法和实测应力值修正初拟构造力，将修正的结果作为实际构造力；然后利用边界元法计算地应力场。（2）边界直接积分法，先假设某些支座发生一定的位移来模拟构造运动；其次建立边界积分方程，式中的未知量多于方程的数目；然后根据实测应力值来建立补充边界积分方程，最后进行边界元计算，确定地应力场。

由上述可知，这两种方法都要引入实测应力值才能求解。第一种方法要利用回归分析方法，在同一计算过程中要用两次边界元法。第二种方法利用实测应力值建立补充方程，实际上实测点是很少的，但是，为了求解精确，往往边界元分得较多，因此需要模拟构造运动的单元也相应增多；如果每个可移动支座的位移不同，则补充方程不够，无法求解，这时只得假设某些可移动支座的位移相同，才能使多余未知量与补充方程数相同，这样就会引起误差；另外，实测应力值总是有误差的，同时引用多点实测应力值进行计算会引起较大的误差，这时需要用回归分析法修正实测应力值。目前这两种方法都采用常边界元。

我们对岩体地应力场问题提出了一个新方法——样条边界元法[3]。这个方法用一次或三次B样条函数来逼近边界未知量，不需要引入实测应力值，也不要利用回归分析法。利用这个方法求解岩体地应力场比边界元回归法及边界直接积分法都优越，不仅计算简便，而且精度也高，值得推广使用。

本节主要介绍岩体地应力场问题的样条边界元法的基本原理及方法。

（一）计算模型

岩体初始地应力场有多种成因，目前一般只计算岩体自重及地质构造运动引起的地应力场。对于岩体自重引起的地应力场，可以采用图4.16所示的计算简图进行计算，这时在有链杆约束的边界上，链杆方向的位移为零，垂直链杆方向的剪应力为零。因此，对于平面问题，每个边界点上只有两个边界未知量。

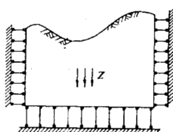


图4.16

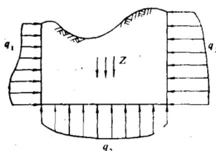


图4.17

如果求解地应力场要考虑地质构造运动的影响，则可以采用图4.17所示的计算简图进行计算，图中Z是岩体自重，q_k是边界未知力，周边自由，因此，对于平面问题，在图4.17的侧边及底边上，每个边界点上有三个边界未知量（u,v,q）；在顶边上，每个边界点上只有两个边界未知量（u，v）。我们也可以利用图4.18或图4.19所示的计算简图计算岩体自重及地质构造运动所引起的地应力场。图4.18用边界作用力q来模拟地质构造运动；图4.19利用左边支座发生水平移动来模拟地质构造运动，因此，图4.18及图4.19左边的每个边界点上有三个边界未知量，其他各边的每个边界点只有两个边界未知量。

如果按三维问题计算岩体地应力场，计算简图可以采用长方体的计算模型。

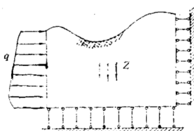


图4.18

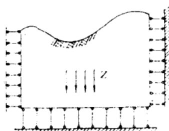


图4.19

（二）样条边界元法

本节以弹性力学平面问题为例，假设岩体为各向同性的线弹性体，可以利用 §4.4 所介绍的方法来建立样条边界元法的计算格式。

如果将整个边界分为M个部分，则式（4.43）可变为

$$C_{kl}(P_0)u_l(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,s)+f_k(P_0) \qquad (4.210)$$

如果将边界Γ_m分为N_m等分，并且用式（4.106）所示的形式来逼近边界未知量，则式（4.210）可变为

$$\{R\}_1=\sum_{m=1}^{M}\Big[\Big([H]_{1m}\{a\}_{1m}+[H]_{2m}\{a\}_{2m}\Big)-\Big([K]_{1m}\{b\}_{1m}+[K]_{2m}\{b\}_{2m}\Big)\Big]-\{f\} \qquad (4.211)$$

上述记号与§4.4相同，见式（4.115）～式（4.118）。

式（4.211）与边界条件有关。如果只计算岩体自重引起的地应力场，式（4.211）引入边界条件后，则未知量的数目与方程的数目相同，因此，利用式（4.211）可以求解岩体自重引起的地应力场问题。对于求解地质构造运动引起的地应力场，式(4.211)引入边界条件后，未知量的数目比方程的数目多，因此需要

建立补充方程。

建立补充方程的方法，目前有几种，一般根据实测应力来建立。本节利用边界剪应力为零的条件来建立补充方程。由式(4.45)可得：

$$\int_{\Gamma}[D_{k12}(P_0,s)p_k(s)-S_{k12}(P_0,s)u_k(s)]d\Gamma+\sigma_{12}^0(P_0)=0 \tag{4.212}$$

由此可得补充方程：

$$\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m}[D_{k12}(P_0,s)p_k(s)-S_{k12}(P_0,s)u_k(s)]d\Gamma+\sigma_{12}^0(P_0)=0 \quad k=1,2 \tag{4.213}$$

将式(4.106)代入式(4.213)可得：

$$R(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\left(\int_{\Gamma_m}D_{k12}(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{b\}_{km}-\sum_{m=1}^{M}\left(\int_{\Gamma_m}S_{k12}(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{a\}_{km}+\sigma_{12}^0(P_0) \tag{4.214}$$

如果 $P_0=P_t$（$t=1,2,\cdots,r$），则式(4.214)可变为

$$\{R\}_2=\sum_{m=1}^{M}\left[\left([S]_{1m}\{a\}_{1m}+[S]_{2m}\{a\}_{2m}\right)-\left([D]_{1m}\{b\}_{1m}+[D]_{2m}\{b\}_{2m}\right)-\{\sigma^0\}\right] \tag{4.215}$$

式中 $\{\sigma^0\}=\{\sigma_{12}^0(P_t)\}$ (4.216)

$$\left.\begin{aligned}[S]_{km}&=\left[\int_{\Gamma_m}S_{k12}(P_t,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right][Q]_m\\ [D]_{km}&=\left[\int_{\Gamma_m}D_{k12}(P_t,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right][Q]_m\end{aligned}\right\} \tag{4.217}$$

式（4.217）可以用高斯求积公式进行计算。由式（4.211）及式（4.215）可得：

$$[H]\{a\}=[K]\{b\}+\{f\} \qquad (2.218)$$

$$[S]\{a\}=[D]\{b\}+\{\sigma^0\} \qquad (4.219)$$

式（4.218）及式（4.219）与边界条件有关，计算时必须引入边界条件。利用式（4.218）及式（4.219）求出$\{a\}$及$\{b\}$后，即可确定边界未知量。当边界未知量确定后，即可求地应力场。

上述用二维样条边界元法分析地应力问题，也可以用三维样条边界元法分析地应力问题，这时计算模型可采用一个长方体，且用链杆约束（图4.20）。关于这方面的内容见文献[8]。



图4.20

§4.9 地下竖井问题

在现代化建设中，有许多地下结构，例如，矿山工程中的竖井，国防工程中的导弹发射井，生命线工程中的管道……，都会遇到竖井设计问题。竖井大多数采用圆柱壳体，而且设计时需要考虑壳体与介质的相互作用。这是一个半空间内有限长圆柱壳与土介质相互作用的三维问题，内力计算相当复杂。对于这类问题，目前尚无有效的计算方法。近年来，国内外许多学者致力于半解析半离散法的应用及研究，例如，无限元法，边界元法，半解析有限元法，有限元——边界元法，解析解——边界元法。本书作者致力于用样条函数方法解这类问题，其中包含样条边界元法，各种有效方法与样条边界元法耦合的方法。采用耦合法时，对壳体采用有效的方法分析，对壳体周围介质采用样条边界元法分

析，然后利用壳体与介质在交界面上的连续条件，建立两者耦合的联立方程，最后求出互相作用的解。

本节只介绍样条边界元法解壳体周围介质的问题。这是一个无限空间问题，采用边界元法可以将三维问题降为二维问题，只需在表面进行二维离散。如果边界未知量函数选择恰当，也可将三维问题降为一维问题。

图4.21是一个壳体与半无限空间介质相互关系图，在径向设

$$u_k=\sum_{n=0}^{\infty}\Big([\phi(r)]\{a\}_{1n}\cos n\theta+[\phi(r)]\{a\}_{2n}\sin n\theta\Big)_k \qquad (4.220)$$

$$p_k=\sum_{n=0}^{\infty}\Big([\phi(r)]\{b\}_{1n}\cos n\theta+[\phi(r)]\{b\}_{2n}\sin n\theta\Big)_k \qquad (4.221)$$

在 z 轴向设

$$u_k=\sum_{n=0}^{\infty}\Big([\phi(z)]\{a\}_{1n}\cos n\theta+[\phi(z)]\{a\}_{2n}\sin n\theta\Big)_k \qquad (4.222)$$

$$p_k=\sum_{n=0}^{\infty}\Big([\phi(z)]\{b\}_{1n}\cos n\theta+[\phi(z)]\{b\}_{2n}\sin n\theta\Big)_k \qquad (4.223$$

式中　$k=1,2,3$；$0\leqslant\theta=2\pi$，$z=x_3$

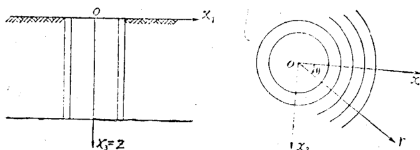


图4.21

由上述可知，对于图4.21所示的问题，如果选用式(4.220)至式(4.223)的形式来逼近边界未知量，则三维问题便降为一维问题。这个问题的具体做法见第十二章。

§4.10 计算例题

【例4.1】图4.22为具有一个圆孔的无限大弹性体，受均布内压 q 作用，它是一个平面应变问题。已知弹性模量$E=0.2079\times10^6$，泊松系数$\mu=0.10$，$q=100$，圆孔半径$r=3$，求它的应力分布问题。

将整个边界分为16等分，利用样条边界元法算得的结果与弹性力学的解析解相差很少，见表4.1。本文用三次B样条逼近边界未知量。

本例是一个轴对称问题，可以利用轴对称性质进行简化计算。由表4.1可知，图4.22的应力及位移随着离开孔边的距离增加而很快减少。

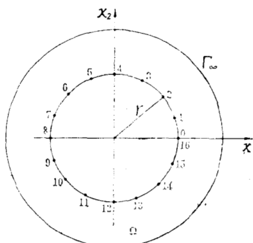


图4.22

表4.1　域内的径向应力

与圆孔中心的距离	样条边界元法	解析法
4	−56.42	−56.25
6	−25.21	−25.00
10	−9.14	−9.00
20	−2.29	−2,25
50	−0.364	−0.360
200	-0.23×10^{-1}	-0.225×10^{-1}
1000	-0.914×10^{-3}	-0.9×10^{-3}

【例4.2】图4.23是一个重力坝，受自重作用，材料容重为 $\gamma=2.4$ 吨/米^3，$E=2.3\times10^6$吨/米^2，$\mu=0.17$，求它的应力分布。

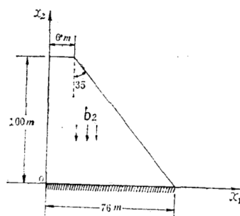


图4.23

本例将整个边界分为4个区域：AB，BC 及 CD各分8个等分，而AD分为4等分。利用样条边界元法算得的结果与解析法相差很少，见表4.2。表中 $SBEM$ ——样条边界元法；AM ——解析法。

表4.2

方法 \ $x(m)$	5	10	15	20	25
$SBEM$	−175.34	−161.42	−145.51	−131.41	−115.10
AM	−179.98	−163.33	−146.68	−130.05	−113.40

方法 \ $x(m)$	30	35	40	45	50
$SBEM$	−98.23	−82.47	−64.24	−47.14	−31.07
AM	−96.73	−80.08	−63.43	−46.78	−30.13

【例4.3】图4.24是一个重力坝，受水及自重共同作用。已知坝高50米，底宽35米，坝体混凝土剪切模量 $G=0.862\times10^6\,T/m^2$，泊松系数 $\mu=0.16$，容重 $\gamma=2.45\,T/m^2$，坝基岩石剪切模量 $G=0.66\times10^6\,T/m^2$，泊松系数 $\mu=0.25$，利用样条边界元法求它的应力。

本例将图4.24分为两个子区域，一个是坝，另一个是基础，而且将基础当作无限域问题，计算结果见图 4.25及图4.26。这个结果与有限元法的结果是一致的，但用样条边界元法计算这类问题的效果比有限元法好，值得推广应用。

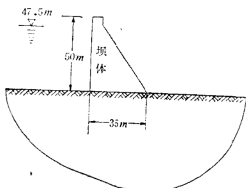


图4.24

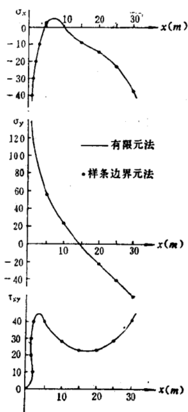


图4.25

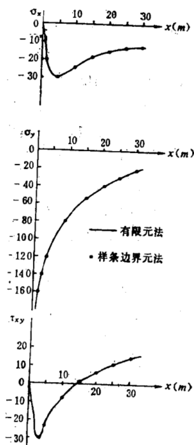


图4.26

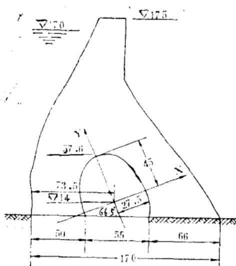


图4.27

【例4.4】 图4.27是一个空腹重力坝，已知坝体和基础的剪切模量$G=0.862\times10^6\mathrm{T/m^2}$，$\mu=0.20$。坝体容重$\gamma=2.4\mathrm{T/m^3}$，不计坝基的重量，利用样条边界元法求它的应力。

本例将图4.27作为一个无限域问题，计算结果见图4.28～图4.30。这些结果与有限元法的结果相差很小，而且在水压力作用下的结果也与光弹实验的结果接近，但重力作用下的结果与光弹实验的结果比较，相差显著，这可能是由于在光弹实验中施加体力不合要求造成的。

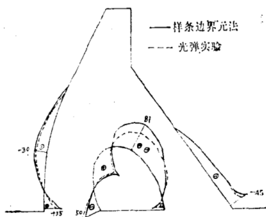


图4.28

如果坝与基础的弹性常数不同，则按两个子域进行计算。在实际中，坝与基础的弹性常数是不同的。

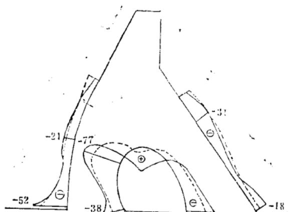


图4.29

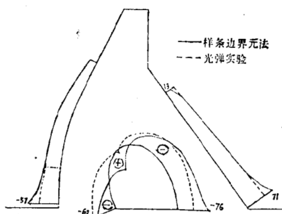


图4.30

§4.11 附录（重要资料）

（一）$u^*_{kl}(s_j,s_i)$及$p^*_{kl}(s_j,s_i)$的计算方法

如果 $F^*_{kl}(s_i,s_j)$是奇异函数，当 $i=j$时，则 $F^*_{kl}(s_i,s_j)$可用下列公式确定：

$$F^*_{kl}(s_i, s_j) = \frac{1}{h}\lim_{P\to s_i}\int_{s_i-\frac{h}{2}}^{s_i+\frac{h}{2}} F^*_{kl}(P, s)d\Gamma(s)$$

（4.224）

由图4.31可知：$r = s - s_i$。当$s = s_i$时，则$r = 0$；当 $s = s_i - \frac{h}{2}$时，则 $r = -\frac{h}{2}$；当 $s = s_i + \frac{h}{2}$，则 $r = \frac{h}{2}$。因此式（4.224）可以变为下列形式：

$$F^*_k(s_i, s_i) = \frac{1}{h}\lim_{r\to 0}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F^*_{kl}(r)dr \qquad (4.225)$$

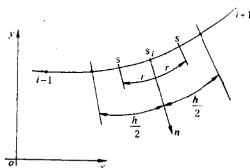


图4.31

利用式（4.224）或式（4.225）可求出$u^*_{kl}(s_i, s_i)$及 $p^*_{kl}(s_i, s_i)$的值。

1．**确定 $u^*_{kl}(s_i, s_i)$值**

本节以平面应变问题为例。由上述可得：

$$u^*_{11}(s_i, s_i) = \frac{1}{h}\int_{s_i-\frac{h}{2}}^{s_i+\frac{h}{2}} \frac{1}{8\pi G(1-\mu)}\left[(3-4\mu)\ln\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right]d\Gamma$$

$$=\frac{1}{8\pi G(1-\mu)h}\left[\left(3-4\mu\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dr\right.$$

$$\left.+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 dr\right]$$

$$=\frac{1}{8\pi G(1-\mu)}\left[(3-4\mu)\left(1-\ln\frac{h}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x_1(B)-x_1(A)}{h}\right)^2\right] \tag{4.226}$$

$$u_{12}^*(s_i, s_i)=\frac{1}{h}\int_{s_i-\frac{h}{2}}^{s_i+\frac{h}{2}}\frac{1}{8\pi G(1-\mu)}\left(\frac{r_1 r_2}{r^2}\right)d\Gamma$$

$$=\frac{1}{8\pi G(1-\mu)h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sin\theta\cos\theta dr$$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{8\pi G(1-\mu)} \tag{4.227}$$

由于r_1、r_2与$\cos\theta$、$\sin\theta$有下列关系：

$$\sin\theta=\frac{r_2}{h}=\frac{x_2(B)-x_2(A)}{h}$$

$$\cos\theta=\frac{r_1}{h}=\frac{x_1(B)-x_1(A)}{h}$$

因此由式（4.227）可得：

$$u_{12}^*(s_i, s_i)=u_{21}^*(s_i, s_i)=\frac{r_1 r_2}{8\pi G(1-\mu)h^2} \tag{4.228}$$

同理可得：

$$u_{22}^*(s_i, s_i)=\frac{1}{8\pi G(1-\mu)}\left[\left(3-4\mu\right)\left(1-\ln\frac{h}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x_2(B)-x_2(A)}{h}\right)^2\right] \tag{4.229}$$

2. 确定 $p^*_{kl}(s_i, s_i)$ 值

$$p^*_{kl}(s_i, s_i) = \frac{1}{h}\int_{s_i-\frac{h}{2}}^{s_i+\frac{h}{2}} p^*_{kl}(r)d\Gamma \qquad (4.230)$$

由图4.31可知，当 $i=j$ 时，$\frac{\partial r}{\partial n}=0$。因此由式(4.32)可知，当 $i=j$ 时由式(4.230)可得 $p^*_{kl}(s_i, s_i)=0$。

(二)半平面的基本解

半平面的基本解为

$$U_{kl} = u^*_{kl} + U^c_{kl}$$

$$T_{kl} = p^*_{kl} + T^c_{kl}$$

$$D^*_{kij} = D_{kij} + D^c_{kij}$$

$$S^*_{kij} = S_{kij} + S^c_{kij} \qquad (4.231)$$

式中 u^*_{kl}、p^*_{kl}、D_{kij} 及 S_{kij} 为开尔文基本解，见式(4.31)，式(4.32)，式(4.49)及式(4.50)；U^c_{kl}，…，S^c_{kij}为补充的基本解。

本节以平面应变问题为例。补充解可写成下列形式：

$$U^c_{11} = H\Big\{-[8(1-\mu)^2-(3-4\mu)]\ln R + [(3-4\mu)R_1^2 - 2c\overline{x}]/R^2 + 4c\overline{x}R_1^2/R^4\Big\}$$

$$U^c_{12} = H\Big\{\frac{(3-4\mu)r_1r_2}{R^2} + \frac{4c\overline{x}R_1r_2}{R^2} - 4(1-\mu)(1-2\mu)\theta\Big\}$$

$$U^c_{21} = H\Big\{\frac{(3-4\mu)r_1r_2}{R^2} - \frac{4c\overline{x}R_1r_2}{R^4} + 4(1-\mu)(1-2\mu)\theta\Big\}$$

$$U^c_{22}=H\Big\{-[8(1-\mu)^2-(3-4\mu)]\ln R+[(3-4\mu)r_2^2+2c\overline{x}]/R^2-4c\overline{x}r_2^2/R^4\Big\} \qquad (4.232)$$

式中$U^*_{kl}(P,Q)$表示P点k方向单位力作用时，在Q点l方向产生的位移补充值，式中

$$\theta=\text{atc tg}(R_2/R_1)$$

$$r=(r_ir_i)^{\frac{1}{2}}\ ,\ R=(R_iR_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_i=x_i(Q)-x_i(P),$$

$$R_i=x_i(Q)-x_i(P)$$

$$c=x_1(P)\geqslant 0\ ,$$

$$\overline{x}=x_1(Q)\geqslant 0$$

$$H=1/[8\pi G(1-\mu)]$$

见图4.32。

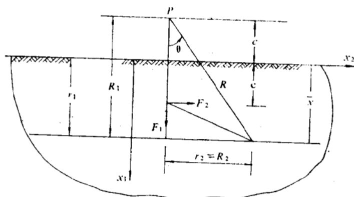


图4.32

应力补充解为

$$\sigma^c_{111}=-\widetilde{H}\Big\{\frac{(3\overline{x}+c)(1-2\mu)}{R^2}+[2R_1(R_1^2+2c\overline{x})-4\overline{x}r_2^2(1-2\mu)]/R^4-16c\overline{x}R_1r_2^2/R^6\Big\}$$

$$\sigma^c_{121} = -\widetilde{H} r_2 \Big\{ -\frac{(1-2\mu)}{R^2} + 2[\overline{x}^2 - 2c\overline{x} - c^2 + 2(1 - 2\mu)\overline{x} R_1]/R^4 + 16c\overline{x} R_1^2 / R^6 \Big\}$$

$$\sigma^c_{221} = -\widetilde{H} \Big\{ \frac{(\overline{x} + 3c)(1-2\mu)}{R^2} + 2[R_1(r_2^2 + 2c^2) - 2cr_2^2 + 2(1-2\mu)\overline{x} r_2^2]/R^4 + 16c\overline{x} R_1 r_2^2 / R^6 \Big\}$$

$$\sigma^c_{112} = -\widetilde{H} r_2 \Big\{ \frac{(1-2\mu)}{R^2} - 2[c^2 - \overline{x}^2 + 6c\overline{x} - 2\overline{x} R_1(1 - 2\mu)]/R^4 + 16c\overline{x} r_2^2 / R^6 \Big\}$$

$$\sigma^c_{122} = -\widetilde{H} \Big\{ \frac{(3\overline{x} + c)(1-2\mu)}{R^2} + 2[(2c\overline{x} + r_2^2)R_1 - 2\overline{x} R_1^2(1-2\mu)]/R^4 - 16c\overline{x} R_1 r_2^2 / R^6 \Big\}$$

$$\sigma^c_{222} = -\widetilde{H} r_2 \Big\{ \frac{3(1-2\mu)}{R^2} + 2[r_2^2 - 4c\overline{x} - 2c^2 - 2\overline{x} R_1(1 - 2\mu)]/R^4 + 16c\overline{x} R_1^2 \Big\} \quad (4.233)$$

式中 $\sigma^c_{kij}(P,Q)$表示 P点 k 方向单位力作用时，在 Q 点产生应力 σ_{ij} 的补充值。式中

$$\widetilde{H} = 1/[4\pi(1-\mu)]$$

由上述可得：

$$T^c_{ki}(P,Q) = \sigma^c_{kij}(P,Q) n_j(Q) \quad (4.234)$$

关于D^c_{kij}及 S^c_{kij} 的具体表达式可参考 D_{kij} 及 S_{kij} 的推导求出来，由于太冗长，这里不列出来了。

参 考 文 献

［1］秦荣，弹性力学的样条边界元法，广西大学；1984年；《工程力学》，3（1987）。

［2］Qin Rong（秦荣），Spline Bounbary Element Methocl of Elasticity Problems，1987。

［3］秦荣，地应力问题的样条边界元法，第一届全国计算岩土力学会议论文集，1987年。

［4］秦荣，王汉波，样条边界元法解弹性力学平面问题，西南及中南九省计算力学会议论文集，1987年。

［5］杜庆华，岑章志，卢西林，弹性与弹塑性边界元法的若干基本工程应用，全 国 第一届工程中的边界元法会议论文集，1985年。

［6］C、A、Brebbia，J,C,F,Telles，L、C、Wrobel，Boundary Element Techniques，1984。

［7］田图中正隆，田中喜久昭，境界要素法——基础及应用（日文），1982，九善株式会社。

［8］刘兴业，应用边界元法解三维岩土应力场问题，同［5］。

［9］秦荣，王汉波，空腹坝的样条边界元法，广西力学学会1987年年会论文，1987年。

［10］王汉波，三次样条边界元法及其在工程中的应用，广西大学计算力学专业硕士学位论文（导师秦荣），1987年12月。

第五章　板壳的样条边界元法

板壳在工程建设中应用很广泛，但它们的内力分析很困难。虽然有限元法是结构分析的一个有力的数值方法，但用它计算板壳，工作量很大，所需内存很多，计算费时费钱，一般中小型计算机难以实现。如果利用本书作者提出的样条边界元法来分析板壳，则效果很好，比有限元法优越得多，可以在小机或微机上实现。本章主要介绍板壳的样条边界元法及其应用[1]～[7]。

§5.1　基本方程

图5.1是一个双曲扁薄壳（$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$），它的基本微分方程为

$$\left.\begin{aligned}&L_x(u,v,w)+X/B=0\\&L_y(u,v,w)+Y/B=0\\&L_z(u,v,w)+Z/B=0\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}L_x(u,v,w)&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\&\quad-(k_1+\mu k_2)\frac{\partial w}{\partial x}\\L_y(u,v,w)&=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\&\quad-(k_2+\mu k_1)\frac{\partial w}{\partial y}\\L_z(u,v,w)&=(k_1+\mu k_2)\frac{\partial u}{\partial x}\\&\quad+(k_2+\mu k_1)\frac{\partial v}{\partial y}-(k_1^2+k_2^2\\&\quad+2\mu k_1k_2)w-d^2\nabla^4 w/12\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \tag{5.3}$$

$$B = Ed/(1-\mu^2)$$

式中u、v及w是扁壳中面的位移分量；k_1、k_2及k_{12}是扁壳的曲率；X、Y及Z是作用在扁壳中面单位面积上的荷载(图5.1)；μ是泊松系数，d是扁壳的厚度，E是弹性模量。

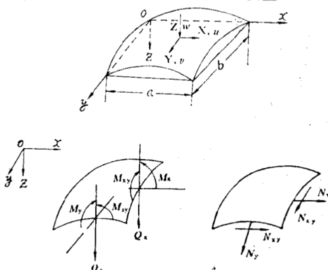


图5.1

内力与位移有下列关系：

$$\left.\begin{aligned} N_x &= B\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y} - (k_1 + \mu k_2)w\right] \\ N_y &= B\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x} - (k_2 + \mu k_1)w\right] \\ N_{xy} &= \frac{1}{2}(1-\mu)B\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{12}w\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= -(1-\mu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

$$
\left.\begin{aligned}
V_x &= -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]\\
V_y &= -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{5.6}
$$

式中　$D=Ed^3/12(1-\mu^2)=Bd^2/12$

设$u(s)$、$v(s)$及$w(s)$是扁壳边界Γ上的位移分量，$\theta(s)$是边界Γ的法向转角，$M_n(s)$及$V_n(s)$分别是扁壳边界的弯矩及折算剪力，$N_n(s)$及$N_t(s)$分别是扁壳边界的法向力及切向力，$u_n(s)$及$u_t(s)$分别为扁壳边界的法向位移及切向位移（图5.2），它们可用下列公式确定：

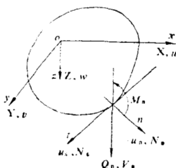


图5.2

$$
\left.\begin{aligned}
u_n &= u\cos(n,x)+v\cos(n,y)\\
u_t &= -u\cos(n,y)+v\cos(n,x)
\end{aligned}\right\} \tag{5.7}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
N_n &= N_x n_x^2+2N_{xy}n_x n_y+N_y n_y^2\\
N_t &= (N_y-N_x)n_x n_y+N_{xy}(n_x^2-n_y^2)
\end{aligned}\right\} \tag{5.8}
$$

$$
\theta=\frac{\partial w}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial w}{\partial y}\cos(n,y)=\frac{\partial w}{\partial n} \tag{5.9}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
M_n &= M_x n_x^2+2M_{xy}n_x n_y+M_y n_y^2\\
M_{nt} &= (M_y-M_x)n_x n_y+M_{xy}(n_x^2-n_y^2)
\end{aligned}\right\} \tag{5.10}
$$

$$
V_n=V_x\cos(n,x)+V_y\cos(n,y) \tag{5.11}
$$

式中　$n_x=\cos(n,x)$，$n_y=\cos(n,y)$

边界条件与一般板壳理论中的提法相同。

§5.2 扁壳的边界积分方程

对于板壳问题，建立边界积分方程可以用加权残数法，也可以用变分原理或外功互等定理。本节利用外功互等定理建立板壳问题的边界积分方程。

（一）外功互等定理

现在考虑两种平衡状态：第一种平衡状态的位移和力为 u、v、w、θ、ψ、u_n、u_s及 N_n、N_s、Q_n、M_n、M_{ns}、X、Y、Z；第二种平衡状态的位移和力为 u^*、v^*、w^*、θ^*、ψ^*、u_n^*、u_s^* 及 N_n^*、N_s^*、Q_n^*、M_n^*、M_{ns}^*、X^*、Y^*、Z^*。根据功的互等定理可知：第一状态的力在第二状态位移上所做的功等于第二状态的力在第一状态位移上所做的功。由此可得：

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega (Xu^*+Yv^*+Zw^*)d\Omega+\int_\Gamma (N_n u_n^*+N_s u_s^*+Q_n w^* \\
&-M_n\theta^*+M_{ns}\psi^*)d\Gamma=\int_\Omega (X^*u+Y^*v+Z^*w)d\Omega \\
&+\int_\Gamma (N_n^*u_n+N_s^*u_s+Q_n^*w-M_n^*\theta+M_{ns}^*\psi)d\Gamma
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

式中 n是边界向外法线方向，ψ为边界切线的转角，Q_n为边界的横向剪力（图5.2）。

（二）积分方程

如果 $X^*=\delta(P,\ Q)$，$Y^*=Z^*=0$，则由式(5.12)可得：

$$
u(P)=\int_\Gamma \Big[N_n(s)u_{n1}^*(P,s)+N_s(s)u_{s1}^*(P,s)
$$

$$+V_n(s)w_1^*(P,s)-M_n(s)\theta_1^*(P,s)-u_n(s)N_{n1}^*(P,s)$$

$$-u_s(s)N_{s1}^*(P,s)-w(s)V_{n1}^*(P,s)$$

$$+\theta(s)M_{n1}^*(P,s)]d\Gamma+T_1+f_1 \tag{5.13}$$

如果 $Y^*=\delta(P,Q)$，$X^*=Z^*=0$， 则由式(5.12)可得：

$$v(P)=\int_{\Gamma}[N_n(s)u_{n2}^*(P,s)+N_s(s)u_{s2}^*(P,s)$$

$$+V_n(s)w_2^*(P,s)-M_n(s)\theta_2^*(P,s)-u_n(s)N_{n2}^*(P,s)$$

$$-u_s(s)N_{s2}^*(P,s)-w(s)V_{n2}^*(P,s)$$

$$+\theta(s)M_{n2}^*(P,s)]d\Gamma+T_2+f_2 \tag{5.14}$$

如果 $Z^*=\delta(P,Q),X^*=Y^*=0$，则由式(5.12)可得：

$$w(P)=\int_{\Gamma}[N_n(s)u_{n3}^*(P,s)+N_s(s)u_{s3}^*(P,s)$$

$$+V_n(s)w_3^*(P,s)-M_n(s)\theta_3^*(P,s)-u_n(s)N_{n3}^*(P,s)$$

$$-u_s(s)N_{s3}^*(P,s)-w(s)V_{n3}^*(P,s)$$

$$+\theta(s)M_{n3}^*(P,s)]d\Gamma+T_3+f_3 \tag{5.15}$$

式中 $f_k=\int_{\Omega}[X(Q)u_k^*(P,Q)+Y(Q)v_k^*(P,Q)$

$$+Z(Q)w_k^*(P,Q)]d\Omega(Q) \quad k=1,2,3,4 \tag{5.16}$$

$$T_k=\sum_{(i)}[w_k^*(P,s_i)\Delta M_{ns}(s_i)-w(s_i)\Delta M_{nsk}^*(P,s_i)] \tag{5.17}$$

$$\Delta M_{ns}(s_i)=M_{ns}(s_i^+)-M_{ns}(s_i^-) \tag{5.18}$$

式中T_k代表角点的影响，$\sum$表示包括边界Γ所有的角点，s是边

界的弧坐标，s_i 为角点 i 的坐标点。如果边界Γ光滑，则试(5.17)变为零。$P=(\xi,\eta)$，$Q=(x,y)$。

扁壳的角点只对扁壳附近的区域有较大的影响。如果用一个非常的圆弧代替角点，则对扁壳大部分区域的影响是非常小的。因此，对扁壳可以忽略角点的影响。

u_k^*、v_k^*及 w_k^*是扁壳的基本解，它们满足下列微分方程：

$$\left.\begin{aligned}&L_x(u_k^*,\ v_k^*,\ w_k^*)+\delta_{1k}\delta(P,Q)/B=0\\&L_y(u_k^*,v_k^*,w_k^*)+\delta_{2k}\delta(P,\ Q)/B=0\\&L_z(u_k^*,v_k^*,w_k^*)+\delta_{3k}\delta(P,\ Q)/B=0\end{aligned}\right\}\qquad(5.19)$$

式中 $$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & i=k\\0 & i\neq k\end{cases}\qquad i,k=1,2,3\qquad(5.20)$$

利用式(5.19)求出u_k^*,v_k^*,w_k^*后，即可利用式(5.7)至式(5.11)求出N_{nk}^*、N_{sk}^*、V_{nk}^*、M_{nk}^*及M_{nsk}^*。当$k=1,2,3$时，式中的导数都是Q点处的导数。

（三）边界积分方程

式(5.13)、式(5.14)及式(5.15)对板壳区域Ω内任一点都适用。如果边界Γ上的位移及力都是已知的，则利用式(5.13)、式(5.14)及式(5.15)可求出板壳内任一点的位移值。但是，边界上的位移及力只有一半是已知的，另一半是未知的，因此必须先求出边界Γ的未知量。为此将P点移到边界Γ上，用P_0表示(图5.3)。当$Q_0=P_0$时，因为基本解有奇异性，因此P_0是一个奇异

点。

因为由式(5.1)可知：

$$
\left.\begin{aligned}
X^{*} &= -BL_x(u_1^*, v_1^*, w_1^*) = L_1(u_1^*, v_1^*, w_1^*) \\
Y^{*} &= -BL_y(u_2^*, v_2^*, w_2^*) = L_2(u_2^*, v_2^*, w_2^*) \\
Z^{*} &= -BL_z(u_3^*, v_3^*, w_3^*) = L_3(u_3^*, v_3^*, w_3^*)
\end{aligned}\right\} \tag{5.21}
$$

因此由第二章式(2.35)可得：

$$
\left.\begin{aligned}
\int_\Omega X^* u d\Omega &= C(P_0)u(P_0) \\
\int_\Omega Y^* v d\Omega &= C(P_0)v(P_0) \\
\int_\Omega Z^* w d\Omega &= C(P_0)w(P_0)
\end{aligned}\right\} \tag{5.22}
$$

式中$C(P)$是一个奇性系数，它与P点的位置及边界曲线在P点的连续性有关(图5.4)，即

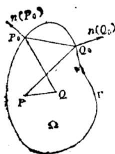


图5.3

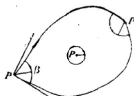


图5.4

$$
C(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma \tag{5.23}
$$

由式(5.23)可得：

$$C(P)=\begin{cases}1 & P\in\Omega\\ 1/2 & P\in\Gamma\text{且}P\text{为光滑点}\\ \beta/2\pi & P\in\Gamma\text{且}P\text{为角点}\\ 0 & P\overline{\in}(\Omega+\Gamma)\end{cases} \tag{5.24}$$

如果基本解采用非奇异函数，不论P点在扁壳什么位置，包括边界上的光滑点及角点，则$C(P)$都等于**1**。

利用式(5.12)及式(5.22)可得下列边界积分方程：

$$\begin{aligned}C(P)u_k(P)=\int_\Gamma[&u_{nk}^*(P,s)N_n(s)+u_{sk}^*(P,s)N_s(s)\\&+w_k^*(P,s)V_n(s)-\theta_k^*(P,s)M_n(s)-N_{nk}^*(P,s)u_n(s)\\&-N_{sk}^*(P,s)u_s(s)-V_{nk}^*(P,s)w(s)\\&+M_{nk}^*(P,s)\theta(s)]d\Gamma(s)+T_k+f_k\qquad k=1,2,3\end{aligned} \tag{5.25}$$

式中　$u_1=u$　　$u_2=v$　　$u_3=w$

式(5.25)代表了三个位移的边界积分方程，但扁壳边界的每一点有四个边界未知量，因此必须补充一个边界积分方程才能确定边界未知量。这个补充边界积分方程可以直接利用第二章的式(2.48)来建立。设$n(P_0)$为P_0点的求导方向，将式(5.25)的第三个边界积分方程两边对$n(P_0)$进行导数便得：

$$\begin{aligned}C(P)\theta(P)=\int_\Gamma[&u_{n4}^*(P,s)N_n(s)+u_{s4}^*(P,s)N_s(s)\\&+w_4^*(P,s)V_n(s)-\theta_4^*(P,s)M_n(s)-N_{n4}^*(P,s)u_n(s)\\&-N_{s4}(P,s)u_s(s)-V_{n4}^*(P,s)\widetilde{w}(s)\\&+M_{n4}^*(P,s)\theta(s)]d\Gamma(s)+T_4+f_4\end{aligned} \tag{5.26}$$

式中 $\widetilde{w}(s)=w(s)=w(P)$ (5.27)

$$u^*_{n4}=(u^*_{n3})' \qquad u^*_{s4}=(u^*_{s3})' \qquad w^*_4=(w^*_3)'$$

$$N^*_{n4}=(N^*_{n3})' \qquad N^*_{s4}=(N^*_{s3})' \qquad \theta^*_4=(\theta^*_3)'$$

$$M^*_{n4}=(M^*_{n3})' \qquad V^*_{n4}=(V^*_{n4})' \qquad M^*_{ns4}=(M^*_{ns3})'$$

$$u^*_4=(u^*_3)' \qquad v^*_4=(v^*_3)'$$

其中 $(F^*)'=\partial F^*/\partial n(P_0)$, $F^*=u^*_{n3},u^*_{s3},\cdots,M^*_{ns3}$.

式(5.26)等号右边积分的第七项也可以采用下列形式代替：

$$\int_\Gamma V^*_{n4}(P,s)\widetilde{w}(s)d\Gamma=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial n^*}\int_\Gamma V^*_{n3}(P,s)w(s)d\Gamma \tag{5.28}$$

式(5.28)中的等号表示左右两边的积分式可以互相代替的意思。T_4可用式(5.17)确定，但用$\widetilde{w}(s_i)$代替$w(s_i)$。

在式(5.25)及式(5.26)中含有下列类型的面积分：

$$f=\int_\Omega q(Q)w^*d\Omega \qquad Q\in\Omega \tag{5.29}$$

利用第二格林公式可以将式(5.29)化为边界积分。

设 $\nabla^2 q(Q)=0 \qquad Q\in\Omega$ (5.30)

$$\nabla^3 F=w^* \qquad Q\in\Omega \tag{5.31}$$

则利用第二格林公式可得：

$$f=\int_\Gamma (q\partial F/\partial n-F\partial q/\partial n)d\Gamma \tag{5.32}$$

由上述可知，利用式(5.25)及式(5.26)可求出板壳的边界未知量。当边界未知量求出后，利用式(5.25)可求出板壳区域Ω内

任一点的位移值。

（四）荷载处理

设 $u_k = u_k^0 + u_k'$ $\quad k=1,2,3$ (5.33)

式中 u_k^0——特解，由式(5.35)确定。

将式(5.33)代入式(5.1)便得：

$$\left.\begin{aligned}L_x(u',v',w')+L_x(u^0,v^0,w^0)+X/B=0\\L_y(u',v',w')+L_y(u^0,v^0,w^0)+Y/B=0\\L_z(u',v',w')+L_z(u^0,v^0,w^0)+Z/B=0\end{aligned}\right\}\tag{5.34}$$

如果设
$$\left.\begin{aligned}L_x(u^0,v^0,w^0)+X/B=0\\L_y(u^0,v^0,w^0)+Y/B=0\\L_z(u^0,v^0,w^0)+Z/B=0\end{aligned}\right\}\tag{5.35}$$

则由式(5.34)可得：

$$\left.\begin{aligned}L_x(u',v',w')=0\\L_y(u',v',w')=0\\L_z(u',v',w')=0\end{aligned}\right\}\tag{5.36}$$

由此可知，在式(5.25)及式(5.26)中令 $X=Y=Z=0$，便可得式(5.36)的边界积分方程。将

$$u_k' = u_k - u_k^0 \tag{5.37}$$

代入这个边界积分方程就可得到板壳的边界积分方程：

$$C(P)u_k(P)=\int_\Gamma U_k d\Gamma + T_k + f_k \quad k=1,2,3,4 \tag{5.38}$$

式中 $u_1=u,\ u_2=v,\ u_3=w,\ u_4=\theta$

$$f_k=C(P)u_k^0(P)+\int_\Gamma [u_{nk}^*(P,s)\ N_n^0(s)+u_{sk}^*(P,s)N_s^0(s)$$

$$+w_k^*(P,s)V_n^0(s)-\theta_k^*(P,s)\ M_n^0(s)-N_{nk}^*(P,s)u_n^0\ (s)$$

$$-N_{sk}^*(P,s)u_s^0(s)-V_{nk}^*(P,s)w^0(s)$$

$$+M_{nk}^*(P,s)\theta^0(s)]d\Gamma(s)+T_k^0 \qquad k=1,2,3 \qquad (5.39)$$

在式(5.38)中，U_1、U_2及U_3与式(5.25)等号右边的边界积分的被积函数相同，U_4与式(5.26)等号右边的边界积分的被积 函 数相同；T_1^0、T_2^0及T_3^0与式(5.17)相同，T_4^0也用式(5.17)确定，但用$\widetilde{w}\ (s)$代替$w(s_i)$；f_4可用式(5.39)确定，但用$\widetilde{w}^0(s)$代替$w^0(s_i)$，T_k^0与T_k的形式相同，在式(5.17)中只要用w^0、$\widetilde{w}^0$及M_n^0，代替w、$\widetilde{w}$及M_n，就行了。

由上述可知，利用式(5.38)求解可以避免域内积分，计算工作大大简化，值得推广。

§5.3 薄板的样条边界元法

（一）边界积分方程

薄板的边界积分方程可以直接从式(5.25)及式(5.26)简化出来。因为在薄板中只有w、θ、M_n及V_n，因此由式(5.25)及 式(5.26)可得：

$$C(P)w(P)=\int_\Gamma [w_1^*(P,s)V_n(s)\ -\theta_1^*(P,s)M_n(s)$$

$$-V_{n1}^*(P,s)w(s)+M_{n1}^*(P,s)\theta(s)]d\Gamma$$

$$+T_1+f_1 \tag{5.40}$$

$$C(P)\theta(P)=\int_\Gamma [w_2^*(P,s)V_n(s)-\theta_2^*(P,s)M_n(s)$$

$$-V_{n2}^*(P,s)w(s)+M_{n2}^*(P,s)\theta(s)]d\Gamma$$

$$+T_2+f_2 \tag{5.41}$$

$$C(P)\psi(P)=\int_\Gamma [w_3^*(P,s)V_n(s)-\theta_3^*(P,s)M_n(s)$$

$$-V_{n3}^*(P,s)w(s)+M_{n3}^*(P,s)\theta(s)]d\Gamma$$

$$+T_3+f_3 \tag{5.42}$$

式中 $$f_k=\int_\Gamma [q(s)\partial F_k^*(P,s)/\partial n-F_k^*(P,s)\partial q(s)/\partial n]d\Gamma \tag{5.43}$$

$$T_k=\sum_{(l)}[w_k^*(P,A_l)\Delta M_{ns}(A_l)-w(A_l)\Delta M_{ns,k}^*(P,A_l)] \tag{5.44}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2^* &= \partial w_1^*/\partial n(P), \quad \theta_2^*=\partial\theta_1^*/\partial n(P) \\ M_{n2}^* &= \partial M_{n1}^*/\partial n(P), \quad V_{n2}^*=\partial V_{n1}^*/\partial n(P) \end{aligned}\right\} \tag{5.45}$$

$$\left.\begin{aligned} w_3^* &= \partial w_1^*/\partial s(P), \quad \theta_3^*=\partial\theta_1^*/\partial s(P) \\ M_{n3}^* &= \partial M_{n1}/\partial s(P), \quad V_{n3}^*=\partial V_{n1}^*/\partial s(P) \end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

$$M_{ns2}^*=\partial M_{ns1}^*/\partial n(P), \quad M_{ns3}^*=\partial M_{ns1}^*/\partial s(P) \tag{5.47}$$

$$\theta=\partial w/\partial n \qquad \psi=\partial w/\partial s$$

w_1^*为弹性薄板的基本解，即

$$w_1^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \tag{5.48}$$

它满足下列方程：

$$D\nabla^4 w_1^* = \delta(P,Q) \tag{5.49}$$

式中$\delta(P,Q)$是狄拉克（Driae）的δ函数，$r = \overline{PQ}$。

当w_1^*确定后，利用本章附录的公式即可求出θ_1^*，M_{n1}^*，V_{n1}^*，M_{ns1}，…。具体形式见本章附录。F_k^*可以由式(5.31)确定。将式(5.48)代入式(5.31)便得：

$$\nabla^2 F_1^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r$$

由此可得：

$$F_1^* = \frac{1}{8\pi D} \frac{r^4}{16} (\ln r - \frac{1}{2}) \tag{5.50}$$

又因为 $w_2^* = \frac{\partial w_1^*}{\partial n(P)} = \frac{r}{8\pi D}(2\ln r + 1)\frac{\partial r}{\partial n(P)}$

$$= \frac{r}{8\pi D}(2\ln r + 1)\cos(n,x) \tag{5.51}$$

将式(5.51)代入式(5.31)可得：

$$F_2^* = \frac{1}{8\pi D} \frac{r^3}{16}(4\ln r - 1)\cos(n,x) \tag{5.52}$$

又因为 $w_3^* = \frac{\partial w_1^*}{\partial s(P)} = \frac{r}{8\pi D}(2\ln r + 1)\frac{\partial r}{\partial s}$

$$=\frac{r}{8\pi D}(2\ln r+1)\sin(n,y) \tag{5.53}$$

将式(5.53)代入式(5.31)可得：

$$F_3^*=\frac{r^3}{8\pi D}(4\ln r-1)\cos(n,y) \tag{5.54}$$

如果域内受局部荷载，而且荷载区域的边界为Γ_q，则式(5.32)及式(5.43)中的积分边界Γ必须改为Γ_q。

（二）样条边界元法

如果将边界Γ分为M个区域（图5.5），则式（5.40）～式（5.42）可变为下列形式：

$$\left.\begin{aligned}
C(P_0,s)w(P_0)&=\sum_{m=1}^{M}\prod\nolimits_{1m}(P_0,s)+T_1+f_1\\
C(P_0)\theta(P_0,s)&=\sum_{m=1}^{M}\prod\nolimits_{2m}(P_0,s)+T_2+f_2\\
C(P_0)\psi(P_0,s)&=\sum_{m=1}^{M}\prod\nolimits_{3m}(P_0,s)+T_3+f_3
\end{aligned}\right\} \tag{5.55}$$

式中

$$\prod\nolimits_{km}(P_0,s)=\int_{\Gamma_m}[w_k^*(P_0,s)V_n(s)-\theta_k^*(P_0,s)M_n(s)-V_{nk}^*(P_0,s)w(s)+M_{nk}^*(P_0,s)\theta(s)]d\Gamma(s) \tag{5.56}$$

$$f_k=\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m}[G_k^*(P_0,s)q(s)-F_k^*(P_0,s)q'(s)]d\Gamma(s) \tag{5.57}$$

其中 $G_k^*(P_0,s)=\partial F_k^*(P_0,s)/\partial n \quad k=1,2,3$ (5.58)

$$q'(s)=\partial q(s)/\partial n \tag{5.59}$$

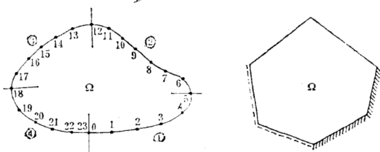


图5.5

利用式（5.55）可以建立样条边界元法的计算格式。现在介绍几种具体做法：

1. 第一种方法

如果将每个区域Γ_m分为N_m等分（图5.5）：

$$s_0<s_1<s_2<\cdots<s_z, \quad z=N_m$$

$$s_i=s_0+ih_m, \quad h_m=s_{i+1}-s_i=(s_z-s_0)/N_m$$

则式(5.56)及式(5.57)可变为

$$\Pi_{km}(P_0,s)=\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[w_k^*(P_0,s_i)V_n(s_i)-\theta_k^*(P_0,s_i)M_n(s_i)$$

$$-V_{nk}^*(P_0,s_i)w(s_i)+M_{nk}^*(P_0,s_i)\theta(s_i)]h_m \tag{5.60}$$

$$f_k=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[G_k^*(P_0,s_i)q(s_i)$$

$$-F_k^*(P_0,s_i)q'(s_i)]h_m \tag{5.61}$$

将式(5.60)及式(5.61)代入式(5.55)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([D]_{km}\{w\}_m-[M]_{km}\{\theta\}_m-[H]_{km}\{V\}_m$$

$$+[K]_{km}\{M\}_m)-[T]_k\{c\}=\{f\}_k \quad k=1,2,3 \quad (5.62)$$

式中 $\{U\}=[U_0\ U_1\ U_2\ \cdots\ U_z]^T$

$U=w,\ \theta,\ M_n,\ V_n$

$$[D]_{km}=[V]_{km}+[R]_{km} \quad (5.63)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[V]_{km}=h_m[V^*_{nk}]_m[\lambda]_m+[C]^B_m\delta_{1k}\\
&[M]_{km}=h_m[M^*_{nh}]_m[\lambda]_m-[C]^B_m\delta_{2k}\\
&[H]_{km}=h_m[w^*_k]_m[\lambda]_m\\
&[K]_{km}=h_m[\theta^*_k]_m[\lambda]_m
\end{aligned}\right\} k=1,2,3 \quad (5.64)$$

$$\{f\}_k=[f_k(s_0)\ f_k(s_1)\ f_k(s_2)\ \cdots\ f_k(s_z)]^T \quad (5.65)$$

$$[P^*]=[P^*(P_0,s_i)],\ P_0=s_j(k=1,2);$$
$$P_0=A_t(k=3) \quad (5.66)$$

$$P^*=w^*_k,\theta^*_k,M^*_{nk},V^*_{nk},\cdots,F^*_k,G^*_k,\quad k=1,2,3$$

$$[\lambda]_m=\mathrm{diag}(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_z) \quad (5.67)$$

$$[C]_m=\mathrm{diag}(C_0,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_z) \quad (5.68)$$

其中 $i=0,1,2,\cdots,z$；$j=0,1,2,\cdots,N$；$z=N_m$，N 为整个边界的分段数；$[C]^B_m$为$[C]_m$扩大的$(N+1)(z+1)$的矩阵，而α及β按下列规定采用：如果按图5.5的形式离散化，则

$$\alpha=\begin{cases}1, & m=1\\ \dfrac{1}{2}, & m\neq 1\end{cases} \qquad \beta=\begin{cases}1, & m=M\\ \dfrac{1}{2}, & m\neq M\end{cases}$$

如果按图5.6及图5.8的形式离散化，则$\alpha=\beta=1$。

利用式(5.62)可求出边界未知量，但式(5.62)与边界条件及角点条件有关，计算时必须引入边界条件。如果薄板周边无角点，则$\{C\}=\{0\}$，$[R]_{km}=[0]$。在这种情况下，可以删掉$k=3$所示的补充方程，然后引入边界条件。例如，如果薄板周边固定且无角点，则$w=\theta=c=0$。因此，由式(5.62)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([K]_{km}\{M\}_m-[H]_{km}\{V\}_m)=\{f\}_k \quad k=1,2 \tag{5.69}$$

式中 $$\{f\}_k=\sum_{m=1}^{M}([G_k^*]_m[\lambda]_m\{q\}_m-[F_k^*]_m[\lambda]_m\{q'\}_m)h_m \tag{5.70}$$

若薄板周边简支且无角点，则$w(s)=M(s)=c=0$。因此，由式(5.62)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([M]_{km}\{\theta\}_m+[H]_{km}\{V\}_m)=-\{f\}_k \quad k=1,2 \tag{5.71}$$

若薄板周边自由且无角点，则$M(s)=V(s)=c=0$。因此，由式(5.62)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([V]_{km}\{w\}_m-[M]_{km}\{\theta\}_m)=\{f\}_k \quad k=1,2 \tag{5.72}$$

对于式(5.66)中的$P^*(s_j,s_i)$可以用配点法确定，也可以用下列积分式确定：

$$P^*(s_j,\ s_i)=\frac{1}{h_m}\int_{s_i-h_m/2}^{s_i+h_m/2}P^*(s_j,\ s)d\Gamma(s) \tag{5.73}$$

如果P^*为奇异函数，则$P^*(s_i,\ s_i)$采用下列积分式确定：

$$P^*(s_i,\ s_i)=\frac{1}{h_m}\lim_{P_0\to s_i}\int_{s_i-h_m/2}^{s_i+h_m/2}P^*(P_0,s)d\Gamma(s) \tag{5.74}$$

式(5.73)及式(5.74)可以用高斯求积公式计算。

如果薄板周边固定且有角点(图5.6)，则 $w(s)=\theta(s)=0$。由于在边界 Γ 上恒有 $\theta=\frac{\partial w}{\partial n}=0$，因此在边界上 $\partial^2 w/\partial n\partial s=0$。由此可知，$T_k=0$。因此，在这种情况下，利用式(5.62)所得的基本方程与式(5.69)相同。

如果薄板周边简支且有角点(图5.6)，则式(5.44)可变为

$$T_k=\sum_{(l)}w_k^*(P_0,A_l)\Delta M_{ns}(A_l)\quad k=1,2,3 \tag{5.75}$$

式中 A_l 是角点的坐标值。利用式(5.62)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([M]_{km}\{\theta\}_m+[H]_{km}\{V\}_m+[T]_k\{c\}=-\{f\}_k \qquad k=1,2,3 \tag{5.76}$$

式中 $\{c\}=[c_1\ c_2\ c_3\ \cdots\ c_L]^T$

$$c_l=\Delta M_{ns}(A_l)\qquad l=1,2,\cdots,L$$

$$\begin{aligned}&[T]_k=[w_k^*(s_j,A_l)],\ k=1,2;\ j=0,1,2\cdots,N\\&[T]_3=[w_k^*(A_t,A_l)]\quad t,l=1,2,\cdots,L\end{aligned} \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned}&[M]_{3m}=h_m[M_{n3}^*]_m[\lambda]_m\\&[H]_{3m}=h_m[w_3^*]_m[\lambda]_m\end{aligned} \tag{5.78}$$

$$\left.\begin{aligned}&[w_3^*]_m=[w_3^*(A_t,s_i)]_m\\&[M_{n3}^*]_m=[M_{n3}^*(A_t,s_i)]_m\end{aligned}\right|\begin{aligned}&i=0,1,2,\cdots,z\\&t=1,2,\cdots,L\end{aligned} \tag{5.79a}$$

$$[F_3^*]_m=[F_3^*(A_t,s_i)]_m \qquad i=0,1,2,\cdots,z$$

$$[G_3^*]_m=[G_3^*(A_t,s_i)]_m \qquad t=1,2,\cdots,L \qquad (5.79b)$$

其余记号见式(5.64)～式(5.68)。利用式(5.76)可求出周边简支薄板的边界未知量$\{\theta\}_m$、$\{V\}_m$及$\{c\}$。

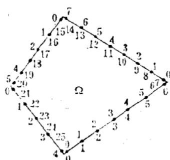


图5.6

在简支边上，由于$w=0$，则

$$\psi=\frac{\partial w}{\partial s}=0 \qquad P\in\Gamma$$

如果薄板周边自由且有角点(图5.6)，则式(5.44)可变为

$$T_k=-\sum_{(l)}w(A_l)\Delta M_{nsk}^*(P_0,A_l) \quad k=1,2,3 \qquad (5.80)$$

式中 $l=1,2,\cdots,L$；L为边界Γ上的角点总数。

对于自由角点(图5.7)，未知量有五个：$w(A_l)$、$\theta(A_l^+)$、$\theta(A_l^-)$、$\psi(A_l^+)$及$\psi(A_l^-)$，但它们并不完全独立，存在下列关系：

$$\psi(A_l^+)\sin\beta=\theta(A_l^+)\cos\beta-\theta(A_l^-)$$

$$\psi(A_l^-)\sin\beta=\theta(A_l^+)-\theta(A_l^-)\cos\beta \qquad (5.81)$$

式中β为边界角点的内角(图5.7)。由此可知，自由角点只有三个独立的未知量。

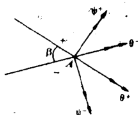


图5.7

由上述可知，对于周边自由且有角点的薄板，可以利用式(5.62)建立样条边界元法的计算格式，这时$M_n(s)=V_n(s)=M_{ns}(s)=0$。利用式(5.62)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([D]_{km}\{w\}_m-[M]_{km}\{\theta\}_m)=\{f\}_k \quad k=1,2 \tag{5.82}$$

式中 $[D]_{km}=[V]_{km}+[R]_{km} \qquad k=1,2 \qquad (5.83)$

$$[R]_{km}=\begin{pmatrix} R_k(s_0,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & R_k(s_0,s_z) \\ R_k(s_1,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & R_k(s_1,s_z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ R_k(s_N,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & R_k(s_N,s_z) \end{pmatrix}_{(N+1)(z+1)} \tag{5.84}$$

其中 $R_k=\Delta M^*_{nsk} \qquad k=1,2 \qquad (5.85)$

如果薄板周边为混合边界(图5.8)，则在式(5.62)中引入混合边界问题的边界条件及角点条件，即可得混合边界问题的样条边界元法的计算格式。

对于混合边界问题，为了分离边界未知量和边界已知量，可以在两个区域分界处布置两个彼此十分接近的点(图5.8)，这两个点属于不同的区域。在混合边界问题中，$[C]_m$中的α及β，

不论m为何值，都等于1（因为不存在参数搭接问题）。对于有角点的边界，为避免角点问题，可以在角点左右布置两个彼此十分接近的点(图5.8)，这时$\alpha=\beta=1$。

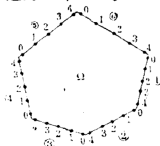


图5.8

由上述可知，利用式(5.62)可求出边界未知量。当边界未知量确定后，利用式(5.40)即可求出域内任一点的挠度$w(P)$值：

$$w(P)=\sum_{m=1}^{M}\prod_{1m}(P,s_i)+T_1(P)+f_1(P) \tag{5.86}$$

w对域内任一点P的二阶偏导数为

$$\partial^2 w(P)=\sum_{m=1}^{M}\partial^2\prod_{1m}(P,s_i)+\partial^2 T_1(P)+\partial^2 f_1(P) \tag{5.87}$$

式中

$$\partial^2\prod_{1m}(P,s_i)=\sum_{i=0}^{2}\lambda_i\,[V_n(s_i)\partial^2 w_1^*(P,s_i)$$

$$-M_n(s_i)\partial^2\theta_1^*(P,s_i)-w(s_i)\partial^2 V_{n1}^*(P,s_i)$$

$$+\theta(s_i)\partial^2 M_{n1}^*(P,s_i)]h_m \tag{5.88}$$

$$\partial^2 T_1(P)=\sum_{(l)}[\partial^2 w_1^*(P,A_l)\Delta M_{ns}(A_l)$$

$$-w(A_l)\Delta\partial^2 M_{ns1}^*(P,A_l)] \tag{5.89}$$

$$\partial^2 f_1(P)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[q(s_i)\partial^2 G_1^*(P,s_i)$$

$$-q'(s_i)\partial^2 F_1^*(P,s_i)]h_m \tag{5.90}$$

式中$\partial^2 F$表示F对P点求二阶偏导数，即

$$\partial^2 F=\frac{\partial^2 F}{\partial n^2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial s^2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial n\partial s}$$

或 $$\partial^2 F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \tag{5.91}$$

利用式(5.87)确定式(5.91)的值后，即可利用式(5.5)求出域内P点的弯矩及扭矩值。

2. 第二种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则利用第三章式(3.54)可将式(5.56)的边界积分化为下列形式：

$$\int_{\Gamma_m} P^*(P_0,s)U(s)d\Gamma=\sum_{i=0}^{z}\lambda_i P^*(P_0,s_i)U(s_i)h_m$$

$$+\frac{h_m^2}{12}[P^*(P_0,s_0)U'(s_0)-P^*(P_0,s_z)U'(s_z)] \tag{5.92}$$

式中$z=N_m$；$U=u,\theta,M_n,V_n$；$P^*=w_k^*,\ \theta_k^*,\ M_{nk}^*,\ V_{nk}^*,$

$F_k^*,\ G_k^*$。

将式(5.92)代入式(5.56)及式(5.57)可得：

$$\widetilde{\Pi}_{km}(P_0,s_i)=\Pi_{km}(P_0,s_i)+\frac{h_m^2}{12}[w_k^*(P_0,s_0)V_n'(s_0)$$

$$-w_k^*(P_0,s_z)V_k'(s_z)-\theta_k^*(P_0,s_0)M_n'(s_0)$$

$$+\theta_k^*(P_0,s_z)M_n'(s_z)-V_{nk}^*(P_0,s_0)w'(s_0)$$

$$+V_{nk}^*(P_0,s_z)w'(s_z)+M_{nk}^*(P_0,s_0)\theta'(s_0)$$

$$-M_{nk}^*(P_0,s_z)\theta'(s_z)] \qquad k=1,2,3 \tag{5.93}$$

$$\widetilde{f}_k=f_k+\frac{h_m^2}{12}[G_k^*(P_0,s_0)\partial q(s_0)/\partial s-G_k^*(P_0,s_z)\partial q(s_z)/\partial s$$

$$-F_k^*(P_0,s_0)\partial q'(s_0)/\partial s+F_k^*(P_0,s_z)\partial q'(s_z)/\partial s] \tag{5.94}$$

式中 $U'=\partial U/\partial s$，$U=w$，θ，V_n，M_n (5.95)

如果设 $P_0=s_j$ $(j=0,1,2,\cdots,N)$，将式(5.93)及式(5.94)代入式(5.55)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}[([D]_{km}\{w\}_m-[M]_{km}\{\theta\}_m-[H]_{km}\{V\}_m$$

$$+[K]_{km}\{M\}_m)+([D_0]_{km}\{w'\}_m-[M_0]_{km}\{\theta'\}_m$$

$$-[H_0]_{km}\{V'\}_m+[K_0]_{km}\{M'\}_m)]-[T]_k\{c\}$$

$$=\{f\}_k \qquad k=1,2,3 \tag{5.96}$$

式中 $\{U\}=[U_0\ U_1\ U_2\ \cdots\ U_z]^T$

$$\{U'\}=[U_0'\ U_1'\ U_2'\ \cdots\ U_z']^T$$

$$[J_0]_{km}=h_m[P_0^*(s_j,s_i)]_{km}[\lambda]_m \qquad k=1,2,3 \tag{5.97}$$

$$[P_0^*(s_j,s_i)]_{km}=$$

$$=\frac{h_m}{6}\begin{bmatrix} P_k^*(s_0,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & -P_k^*(s_0,s_z) \\ P_k^*(s_1,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & -P_k^*(s_1,s_z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_k^*(s_N,s_{0m}) & 0 & \cdots & 0 & -P_k^*(s_N,s_z) \end{bmatrix}_{(N+1)(z+1)} \quad (5.98)$$

其中 $P_k^*=w_k^*,\ \theta_k^*,\ V_{nk}^*,\ M_{nk}^*,\ \cdots,\ F_k^*,\ G_k^*$

$J_0=D_0,\ H_0,\ K_0,\ M_0$

由式(5.96)可知，当$U'=0$时，则式(5.96)可变为式(5.62)，而且所有记号都相同。由此可知，式(5.62)是式(5.96)的一个特例，而式(5.96)是式(5.62)的一个发展。

如果边界未知量采用三次B样条函数来逼近，则

$$\left.\begin{aligned} w(s)&=[\phi(s)]\{a\}_m & \theta(s)&=[\phi(s)]\{b\}_m \\ V_n(s)&=[\phi(s)]\{A\}_m & M_n(s)&=[\phi(s)]\{B\}_m \end{aligned}\right\} \quad (5.99)$$

$$\left.\begin{aligned} w'(s)&=[\phi'(s)]\{a\}_m & \theta'(s)&=[\phi'(s)]\{b\}_m \\ V_n'(s)&=[\phi'(s)]\{A\}_m & M_n'(s)&=[\phi'(s)]\{B\}_m \end{aligned}\right\} \quad (5.100)$$

式中 $\{S\}_m=[U_0\ S_1\ S_2\ \cdots\ S_{z-1}\ U_z]^T$

$S=a,\ b,\ A,\ B;\ U=w,\ \theta,\ V_n,\ M_n$

$$[\phi(s)]=[\varphi_{3e}(s)][Q]_m \quad e=-1,0,1,2,\cdots,z+1 \quad (5.101)$$

$$[Q]_m=\mathrm{diag}([g],[I],[h]) \quad (5.102)$$

其中$[I]$为$(z-1)(z-1)$的单位矩阵，$[g]$及$[h]$由第一章式(1.21)确定。φ_{3e}为三次B样条函数，即

$$\varphi_{3e}=\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h_m}-e\right) \quad e=-1,0,1,2,\cdots,z+1 \qquad (5.103)$$

由式(5.99)及式(5.100)可得：

$$\{U\}_m=[N]_m\{S\}_m \quad \{U'\}_m=[N']_m\{S\}_m \qquad (5.104)$$

式中 $[N]_m=[B]_m[Q]_m$， $[N']_m=[B']_m[Q]_m$ (5.105)

式中$[B]_m$及$[B']_m$分别由第三章的式(3.69)及式(3.70)确定。

式(5.96)与边界条件有关。如果薄板周边固定且有角点（图5.6），则式(5.96)可变为

$$\sum_{m=1}^{M}([K]_{km}\{M\}_m-[H]_{km}\{V\}_m+[K_0]_{km}\{M'\}_m$$

$$-[H_0]_{km}\{V'\}_m)=\{f\}_k \qquad k=1,2 \qquad (5.106)$$

将式(5.104)代入式(5.106)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([\widetilde{K}]_{km}\{B\}_m-[\widetilde{H}]_{km}\{A\}_m)=\{f\}_k \quad k=1,2 \qquad (5.107)$$

$$\text{式中}\quad \left.\begin{aligned}[\widetilde{K}]_{km}&=[K]_{km}[N]_m+[K_0]_{km}[N']_m\\ [\widetilde{H}]_{km}&=[H]_{km}[N]_m+[H_0]_{km}[N']_m\end{aligned}\right\}\ k=1,2 \qquad (5.108$$

利用式(5.107)求出$\{A\}_m$及$\{B\}_m$后，即可利用式(5.104)求出边界未知量$\{M\}_m$及$\{V\}_m$。

如果薄板周边简支且有角点(图5.6)，则式(5.96)可变为

$$\sum_{m=1}^{M}([M]_{km}\{\theta\}_m+[H]_{km}\{V\}_m+[M_0]_{km}\{\theta'\}_m$$

$$+[H_0]_{km}\{V'\}_m)+[T]_k\{c\}=-\{f\}_k$$

$$k=1,2,3 \tag{5.109}$$

将式(5.104)代入式(5.109)便得：

$$\sum_{m=1}^{M}([\widetilde{M}]_{km}\{b\}_m+[\widetilde{H}]_{km}\{A\}_m)+[T]_k\{c\}=-\{f\}_k$$

$$k=1,2,3 \tag{5.110}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}[\widetilde{M}]_{km}&=[M]_{km}[N]_m+[M_0]_{km}[N']_m\\ [\widetilde{H}]_{km}&=[H]_{km}[N]_m+[H_0]_{km}[N']_m\end{aligned}\right\} k=1,2,3$$

$$\tag{5.111}$$

利用式(5.110)求出$\{A\}_m$及$\{b\}_m$后，即可利用式(5.104)求出边界未知量$\{\theta\}_m$及$\{V\}_m$。

如果薄板周边自由且有角点(图5.6)，则式(5.96)可变为

$$\sum_{m=1}^{M}([D]_{km}\{w\}_m-[M]_{km}\{\theta\}_m+[D_0]_{km}\{w'\}_m$$

$$-[M_0]_{km}\{\theta'\}_m)=\{f\}_k \quad k=1,2 \tag{5.112}$$

将式(5.104)代入式(5.112)便得：

$$\sum_{m=1}^{M}([\widetilde{D}]_{km}\{a\}_m-[\widetilde{M}]_{km}\{b\}_m)=\{f\}_k \quad k=1,2 \tag{5.113}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}[\widetilde{D}]_{km}&=[D]_{km}[N]_m+[D_0]_{km}[N']_m\\ [\widetilde{M}]_{km}&=[M]_{km}[N]_m+[M_0]_{km}[N']_m\end{aligned}\right\} k=1,2 \tag{5.114}$$

利用式(5.113)求出$\{a\}_m$及$\{b\}_m$后，即可利用式(5.104)求出边界未知量$\{w\}_m$及$\{\theta\}_m$。

如果边界Γ为混合边界(图5.8)，先对式(5.96)引入混合边

界问题的边界条件及角点条件，然后将式(5.104)代入，即可获得薄板混合边界问题的样条边界元法的计算格式。

3. 第三种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则

$$\left.\begin{aligned} w(s) &= \sum_{i=0}^{z} w_i \phi_i(s) \qquad \theta(s) = \sum_{i=0}^{z} \theta_i \phi_i(s) \\ M_n(s) &= \sum_{i=0}^{z} M_i \phi_i(s) \qquad V_n(s) = \sum_{i=0}^{z} V_i \phi_i(s) \end{aligned}\right\} \tag{5.115}$$

式中$z=N_m$，$\phi_i(s)$采用第一章式(1.27)的形式。将式(5.115)代入式(5.56)可得：

$$\begin{aligned} \Pi_{km}(P_0,s) = \sum_{i=0}^{z} \Big[&\Big(\int_{\Gamma_m} w_k^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)V_i \\ &- \Big(\int_{\Gamma_m} \theta_k^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)M_i \\ &- \Big(\int_{\Gamma_m} V_{nk}^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)w_i \\ &+ \Big(\int_{\Gamma_m} M_{nk}^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)\theta_i \Big] \end{aligned} \tag{5.116}$$

式中 $w_i=w(s_i)$，$\theta_i=\theta(s_i)$，$M_i==M_n(s_i)$，$V_i=V_n(s_i)$。

如果将式(5.116)代入式(5.55)可得：

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M} ([D]_{km}\{w\}_m - [M]_{km}\{\theta\}_m - [H]_{km}\{V\}_m \\ + [K]_{km}\{M\}_m - [T]_k\{c\} = \{f\}_k \quad k=1,2,3 \end{aligned} \tag{5.117}$$

式中 $[D]_{km}=[V]_{km}+[R]_{km}$ (5.118)

$$
\left.\begin{aligned}
&[V]_{km}=[V_{ri}]_{km}+[C]_m^B\delta_{1k}\\
&[M]_{km}=[M_{ri}]_{km}-[C]_m^B\delta_{2k}\\
&[H]_{km}=[H_{ri}]_{km},\ [K]_{km}=[K_{ri}]_{km}
\end{aligned}\right\}\quad k=1,2,3 \tag{5.119}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&P_{ri}=\int_{\Gamma_m}Q_k^*(s_r,s)\phi_i(s)d\Gamma(s),\quad k=1,2\quad (r=j)\\
&P_{ri}=\int_{\Gamma_m}Q_k^*(A_r,s)\gamma_i(s)d\Gamma(s),\quad k=3\quad (r=t)
\end{aligned}\right\}
$$

(5.120)

式(5.120)可以用数值积分法的高斯求积公式进行计算。$[R]_k$由式(5.84)确定。

式(5.117)与边界条件及角点条件有关。引入边界条件及角点条件后，式(5.117)可变为

$$
\sum_{m=1}^{M}([A]_{km}\{X\}_m+[Q]_{km}\{Z\}_m-[T]_k\{c\}=\{f\}_k \tag{5.121}
$$

对于混合边界问题(图5.8)，如果边界 Γ_m 为固定边，则 $\{c\}=\{0\}$。因此

$$
\{X\}_m=\{V\}_m \qquad \{Z\}_m=\{M\}_m \tag{5.122}
$$

$$
[A]_{km}=-[H]_{km} \qquad [Q]_{km}=[K]_{km} \tag{5.123}
$$

如果边界Γ_m为简支边，则

$$
\{X\}_m=\{\theta\}_m \qquad \{Z\}_m=\{V\}_m \tag{5.124}
$$

$$
[A]_{km}=-[M]_{km} \qquad [Q]_{km}=-[H]_{km} \tag{5.125}
$$

$$
\{c\}=[c_1\ c_2\ \cdots\ c_L]^T \tag{5.126}
$$

如果边界Γ_m为自由边，则$\{c\}=\{0\}$。因此

$$\{X\}_m=\{w\}_m \qquad \{Z\}_m=\{\theta\}_m \tag{5.127}$$

$$[A]_{km}=[D]_{km} \qquad [Q]_{km}=-[M]_{km} \tag{5.128}$$

利用式(5.121)求出边界未知量后，即可利用式(5.40)的离散化格式求出域内任一点P的挠度值，利用式(5.5)求出域内任一点P的弯矩及扭矩值。

4. 第四种方法

设

$$\begin{aligned} w(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{w\}_m \\ \theta(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{\theta\}_m \\ M_n(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{M\}_m \\ V_n(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{V\}_m \end{aligned} \tag{5.129}$$

则式(5.56)可变为

$$\begin{aligned} \Pi_{km}(P_0,s)=&\left(\int_{\Gamma_m} w_k^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{V\}_m \\ &-\left(\int_{\Gamma_m}\theta_k^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{M\}_m \\ &-\left(\int_{\Gamma_m}V_{nk}^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{w\}_m \\ &-\left(\int_{\Gamma_m}M_{nk}^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{M\}_m \end{aligned} \tag{5.130}$$

式中 $[Q]_m=[B]_m^{-1}$ (5.131)

$[B]_m$由第一章式(1.130)确定。将式(5.130)代入式(5.55)可得

$$\sum_{m=1}^{M}([D]_{km}\{w\}_m-[M]_{km}\{\theta\}_m-[H]_{km}\{V\}_m$$

$$+[K]_{km}\{M\}_m)-[T]_k\{c\}=\{f\}_k \quad k=1,2,3 \qquad (5.132)$$

式中 $[D]_{km}$、$[M]_{km}$、$[H]_{km}$及$[K]_{km}$ 的形式与式(5.118)及式(5.119)相同，但这时

$$\left.\begin{aligned}
[P_{ri}]_{km} &= \left[\int_{\Gamma_m} Q_k^*(s_r,s)[\varphi_{3e}(s)]\,d\Gamma\right][Q]_m, \\
&\qquad r=j \quad (k=1,2) \\
[P_{ri}]_{km} &= \left[\int_{\Gamma_m} Q_k^*(s_r,s)[\varphi_{3e}(s)]\,d\Gamma\right][Q]_m, \\
&\qquad r=t \quad (k=3)
\end{aligned}\right\} \qquad (5.133)$$

式(5.133)利用高斯求积公式计算。利用式(5.132)可求出边界未知量，但注意引入边界条件。

5. 第五种方法

设

$$\left.\begin{aligned}
w(s) &= [\varphi_{3e}][Q]_m\{a\}_m, \quad \theta(s)=[\varphi_{3e}][Q]_m\{b\}_m \\
V_n(s) &= [\varphi_{3e}][Q]_m\{A\}_m, \quad M_n(s)=[\varphi_{3e}][Q]_m\{B\}_m
\end{aligned}\right\} \qquad (5.134)$$

则式(5.56)可变为

$$\begin{aligned}
\Pi_{km}(P_0,s) = {} & \left(\int_{\Gamma_m} w_k^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]\,d\Gamma\right)[Q]_m\{A\}_m \\
& -\left(\int_{\Gamma_m} \theta_k^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]\,d\Gamma\right)[Q]_m\{B\}_m \\
& -\left(\int_{\Gamma_m} V_k^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]\,d\Gamma\right)[Q]_m\{a\}_m \\
& +\left(\int_{\Gamma_m} M_{nk}^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]\,d\Gamma\right)[Q]_m\{b\}_m
\end{aligned} \qquad (5.135)$$

式中　$[Q]_m = \mathrm{diag}([g],\ [I],\ [h])$　(5.136)

其中$[I]$为$(z-1)(z-1)$的单位矩阵，$z = N_m$；$[g]$及$[h]$由第三章式(3.127)确定。将式(5.135)代入式(5.55)可得

$$\sum_{m=1}^{M}([D]_{km}\{a\}_m - [M]_{km}\{b\}_m - [H]_{km}\{A\}_m + [K]_{km}\{B\}_m$$

$$-[T]_k\{c\} = \{f\}_k \qquad k = 1,2,3 \tag{5.137}$$

式中 $[D]_{km}$、$[M]_{km}$、$[H]_{km}$及$[K]_{km}$ 的形式与式(5.118)及式(5.119)相同，$[P_{r,i}]$的形式与式(5.133)相同，$[Q]_m$这时利用式(5.136)确定。利用式(5.137)求出未知参数后，即可利用下列公式求出边界未知量：

$$\{U\}_m = [N]_m\{S\}_m \tag{5.138}$$

式中　$[N]_m = [B]_m[Q]_m$　(5.139)

其中$U = w,\ \theta,\ V_n,\ M_n$；$S = a,\ b,\ A,\ B$。

（三）角点的处理

如果边界有角点，由于角点出现新的未知量，则必须增加新的补充方程。建立补充方程的方法有几种，本节采用一个简单的方法，假设在角点左右有两个彼此非常接近 的 点(图5.6)，而且这两个点分别属于左右两边。这样求解的效果很好。

如果薄板只有角点支撑(图5.9)，则

$$\begin{aligned} &V_n(s) = M_n(s) = 0 \\ &w(A_l) = 0\ ,\ \Delta M_{ns}(A_l) = F(A_l) \end{aligned} \tag{5.140}$$

式中$F(A_l)$为角点的支承反力，$l = 1,2,\cdots,L$。

引入上述边界条件及角点条件后，式(5.117)可变为下 列 形

式：

$$\sum_{m=1}^{M}([D]_{km}\{w\}_m-[M]_{km}\{\theta\}_m)-[T]_k\{F\}=\{f\}_k \quad (5.141)$$

式中 $\{F\}=[F_1\ F_2\ F_3\ \cdots\ F_L]^T$ (5.142)

$$F_l=F(A_l) \qquad l=1,2,\cdots,L \quad (5.143)$$

由式(5.141)可得：

$$[A]\{X\}=\{f\} \quad (5.144)$$

式中 $\{X\}=[\{a\}^T\ \{b\}^T\ \{F\}^T]^T$ (5.145)

$$[A]=[[V]\ \ -[M]\ \ -[T]] \quad (5.146)$$

$$\{f\}=[\{f\}_1^T\ \{f\}_2^T\ \{f\}_3^T]^T \quad (5.147)$$

$$[V]=\begin{bmatrix}[V]_{11} & [V]_{12} & \cdots & [V]_{1M}\\ [V]_{21} & [V]_{22} & \cdots & [V]_{2M}\\ [V]_{31} & [V]_{32} & \cdots & [V]_{3M}\end{bmatrix} \quad (5.148)$$

$$[M]=\begin{bmatrix}[M]_{11} & [M]_{12} & \cdots & [M]_{1M}\\ [M]_{21} & [M]_{22} & \cdots & [M]_{2M}\\ [M]_{31} & [M]_{32} & \cdots & [M]_{3M}\end{bmatrix} \quad (5.149)$$

$$[T]=[\ [T]_1^T\ \ [T]_2^T\ \ [T]_3^T]^T \quad (5.150)$$

$$\left.\begin{aligned}&[T]_1=[w_1^*(s_j,A_l)]\\&[T]_2=[w_2^*(s_j,A_l)]\\&[T]_3=[w_3^*(A_t,A_l)]\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&j=0,1,2,\cdots,N\\&t,l=1,2,3,\cdots,L\end{aligned} \quad (5.151)$$

利用式(5.144)可求出角点支承薄板的边界未知量。

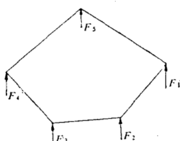


图5.9

(四) $F^*(s_i, s_i)$ 值的求法

如果$F^*(P,s)$是一个奇异函数，则$F^*(s_i,s_i)$值可利用式(5.74)求出来。

$V^*_{nk}(s_i,s_i)$也可以用刚体位移来确定。如果薄板只有刚体位移，而且$q=0$，则由式(5.40)～式(5.42)可得：

$$C(P_0)+\int_\Gamma V^*_{n1}(P_0,s)d\Gamma+\sum_{(l)}\Delta M_{ns1}(P_0,A_l)=0 \tag{5.152}$$

$$\int_\Gamma V^*_{n2}(P_0,s)d\Gamma+\sum_{(l)}\Delta M_{ns2}(P_0,A_l)=0 \tag{5.153}$$

$$\int_\Gamma V^*_{n3}(A_l,s)d\Gamma+\sum_{(l)}\Delta M_{ns3}(A_l,A_l)=0 \tag{5.154}$$

由此可得：

$$\lambda_i h V^*_{n1}(s_i,s_i) = -\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{M} V^*_{n1}(s_i,s_k)\lambda_k h - \sum_{(l)}\Delta M^*_{ns1}(s_i,A_l)$$

$$-C(s_i) \tag{5.155}$$

$$\lambda_i h V^*_{n2}(s_i,s_i) = -\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{M} V^*_{n2}(s_i,s_k)\lambda_k h - \sum_{(l)}\Delta M^*_{ns2}(s_i,A_l) \tag{5.156}$$

$$\lambda_i h V^*_{n3}(s_i,s_i) = -\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{M} V^*_{n3}(s_i,s_k)\lambda_k h - \sum_{(l)}\Delta M^*_{ns3}(s_i,A_l) \tag{5.157}$$

这种求$F^*(s_i,s_i)$值的方法对扁壳也适用。

（五）域外奇点的样条边界元法

域外奇点法就是在域外建立边界元法的计算格式。为此，在薄板的实际边界Γ的外围构造一个相似的虚边界Γ^*(图5.10)，使虚边界上的点与实际边界上的点一一对应，而且

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \cdots = \gamma > 1 \tag{5.158}$$

计算表明，$\gamma = 1.01 \sim 2.5$均有效，建议取$\gamma = 1.10 \sim 1.5$。

因为虚边界上的P点就是域外奇点，因此各系数公式中的积分不会出现奇异性。故域外奇点样条边界元法可完全避免奇异积分。

由于P在区域$(\Omega+\Gamma)$外，则$C(P)=0$。由此可知，式(5.40)～式(5.157)对域外奇点样条边界元法也适用，只要令

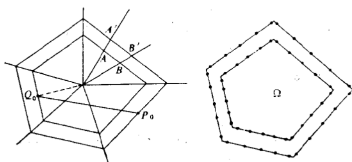


图5.10

$C(P)=0$ 就行了。具体做法与前面相同。但法意，P 点在虚边界Γ^*上。

§5.4 扁壳的样条边界元法

如果将扁壳边界分为M个区域(图5.5)，则式(5.25)及式(5.26)可变为下列形式

$$C(P_0)u_k(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\prod_{km}(P_0,s)+f_k(P_0) \tag{5.159}$$

式中 $u_1=u$, $u_2=v$, $u_3=w$, $u_4=\theta$

如果将每个区域分为N_m等分(图5.5)：

$$s_0<s_1<s_2<\cdots<s_{N_m}$$

$$s_i=s_0+ih_m,\quad h_m=s_{i+1}-s_i=l_m/N_m$$

则式(5.159)可变为

$$R_k(P_0)=C(P_0)u_k(P_0)-\sum_{m=1}^{M}\prod_{km}(P_0,s_i)-f_k(P_0) \tag{5.160}$$

式中 $$\Pi_{km}(P_0,s_i)=\sum_{i=1}^{N_m}\lambda_i\Big[u^*_{nk}(P_0,s_i)N_n(s_i)$$

$$+u^*_{sk}(P_0,s_i)N_s(s_i)+w^*_k(P_0,s_i)V_n(s_i)$$

$$-\theta^*_k(P_0,s_i)M_n(s_i)-N^*_{nk}(P_0,s_i)u_n(s_i)$$

$$-N^*_{sk}(P_0,s_i)u_s(s_i)-V^*_{nk}(P_0,s_i)w(s_i)$$

$$+M^*_{nk}(P_0,s_i)\theta(s_i)\Big]h_m \quad k=1,2,3,4 \tag{5.161}$$

$$f_k(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{N_m}\lambda_i\Big[G^*_k(P_0,s_i)q(s_i)$$

$$-F^*_k(P_0,s_i)q'(s_i)\Big]h_m \tag{5.162}$$

这里 $X=Y=0$，$Z=q$。当然，$f_k(P_0)$也可以利用式(5.39)确定。将式(5.39)离散，可得与式(5.162)相似的离散形式：

$$f_k(P_0)=C(P_0)u^0_k(P_0)+\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{N_m}\lambda_i\Big[u^*_{nk}(P_0,s_i)N^0_n(s_i)$$

$$+u^*_{sk}(P_0,s_i)N^0_s(s_i)+w^*_k(P_0,s_i)V^0_n(s_i)$$

$$-\theta^*_k(P_0,s_i)M^0_n(s_i)-N^*_{nk}(P_0,s_i)u^0_n(s_i)$$

$$-N^*_{sk}(P_0,s_i)u^0_s(s_i)-V^*_{nk}(P_0,s_i)w^0(s_i)$$

$$+M^*_{nk}(P_0,s_i)\theta(s_i)\Big]h_m,\quad k=1,2,3,4 \tag{5.163}$$

本节对扁壳不考虑角点的影响，令$T_k=0$。

边界未知量可以用三次B样条函数来逼近，即

$$\left.\begin{aligned} u_n(s)&=[\phi(s)]\{a\}_m \quad & u_s(s)&=[\phi(s)]\{b\}_m \\ w(s)&=[\phi(s)]\{c\}_m \quad & \theta(s)&=[\phi(s)]\{d\}_m \end{aligned}\right\} \tag{5.164}$$

$$\begin{aligned} N_n(s)&=[\phi(s)]\{A\}_m \quad & N_s(s)&=[\phi(s)]\{B\}_m \\ V_n(s)&=[\phi(s)]\{C\}_m \quad & M_n(s)&=[\phi(s)]\{D\}_m \end{aligned} \tag{5.165}$$

式中 $\{F\}_m=[W_0\ F_1\ F_2\ \cdots\ F_{z-1}\ W_z]^T_m$

$F=a,\ b,\ c,\ d,\ A,\ B,\ C,\ D$

$W=u_n,\ u_s,\ w,\ \theta,\ N_n,\ N_s,\ V_n,\ M_n$

由式(5.164)及式(5.165)可得：

$$\begin{aligned} \{u_n\}_m&=[N]_m\{a\}_m \quad & \{u_s\}_m&=[N]_m\{b\}_m \\ \{w\}_m&=[N]_m\{c\}_m \quad & \{\theta\}_m&=[N]_m\{d\}_m \end{aligned} \tag{5.166a}$$

$$\left.\begin{aligned} \{N_n\}_m&=[N]_m\{A\}_m \quad & \{N_s\}_m&=[N]_m\{B\}_m \\ \{V_n\}_m&=[N]_m\{C\}_m \quad & \{M_n\}&=[N]_m\{D\}_m \end{aligned}\right\} \tag{5.166b}$$

式中 $[N]_m=[B]_m[Q]_m$ (5.167)

利用上述各式可以建立扁壳的样条边界元法的计算格式。现在介绍几种具体做法：

（一）第一种方法

将式(5.161)及式(5.162)代入式(5.160)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([N_n]_m\{u_n\}_n+[N_s]_m\{u_s\}_m+[V_n]\{w\}_m$$
$$-[M_n]_m\{\theta\}_m-[U_n]_m\{N_n\}_m-[U_s]_m\{N_s\}_m$$
$$-[W]_m\{V_n\}_m+[\theta]_m\{M_n\}_m)=\{f\} \tag{5.168}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
[N_n]_m&=[E_1]_m+h_m[N_n^*]_m[\lambda]_m\\
[N_s]_m&=[E_2]_m+h_m[N_s^*]_m[\lambda]_m\\
[V_n]_m&=[E_3]_m+h_m[V_n^*]_m[\lambda]_m\\
[M_n]_m&=[E_4]_m-h_m[M_n^*]_m[\lambda]_m
\end{aligned}\right\} \tag{5.169}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[U_n]_m=h_m[u_n^*]_m[\lambda]_m,\ [U_s]_m=h_m[u_s^*]_m[\lambda]_m\\
&[W]_m=h_m[w^*]_m[\lambda]_m,\ [\theta]_m=h_m[\theta^*]_m[\lambda]_m
\end{aligned}\right\} \tag{5.170}$$

$$\{f\}=[\{f_1\}^T\ \{f_2\}^T\ \{f_3\}^T\ \{f_4\}^T]^T \tag{5.171}$$

$$[E_1]_m=\begin{Bmatrix} n_x[C]_m^B\\ n_y[C]_m^B\\ [0]\\ [0]\end{Bmatrix}\qquad [E_2]_m=\begin{Bmatrix} -n_y[C]_m^B\\ n_x[C]_m^B\\ [0]\\ [0]\end{Bmatrix} \tag{5.172}$$

$$[E_3]_m = \begin{Bmatrix} [0] \\ [0] \\ [C]_m^B \\ [0] \end{Bmatrix} \qquad [E_4]_m = \begin{Bmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [C]_m^B \end{Bmatrix} \tag{5.173}$$

$$[Q^*]_m = \left[[Q_1^*]_m^T \ \ [Q_2^*]_m^T \ \ [Q_3^*]_m^T \ \ [Q_4^*]_m^T \right]^T \tag{5.174}$$

$$[Q_k^*]_m = [Q_k^*(s_j, s_i)]_m,$$

$$i = 0,1,2,\cdots,z, \quad j = 0,1,2,\cdots,N \tag{5.175}$$

$$\theta^* = u_n^*, \ u_s^*, w^*, \theta^*, N_n^*, \ N_s^*, \ V_n^*, \ M_n^*$$

这里[0]为 $(N+1)(z+1)$ 的矩阵；$[C]_m^B$为$[C]_m$扩大的$(N+1)\cdot(z+1)$的矩阵，$[C]_m$ 由式(5.68)确定；$[Q_k^*]$为$(N+1)(z+1)$的矩阵。N为整个边界Γ的分段数。

对于式（5.175）中的$Q_k^*(s_j, s_i)$可以用配点法确定，也可以利用式(5.73)及式(5.74)确定，后者精确度比前者精确度高。

式(5.168)与边界条件有关。为了求解边界未知量，必须在式(5.168)中引入边界条件。

如果扁壳周边固定，由于边界条件为 $u = v = w = \theta = 0$，则

$$\{u_n\}_m = \{u_s\}_m = \{w\}_m = \{\theta\}_m = \{0\}, \quad m = 1,2,\cdots,M$$

如果扁壳周边自由，由于边界条件为 $N_n = N_s = V_n = M_n = 0$，则

$$\{N_n\}_m = \{N_s\}_m = \{V_n\}_m = \{M_n\}_m = \{0\}, \quad m = 1,2,\cdots,M$$

如果扁壳周边简支，由于边界条件为 $u_s = w = N_n = M_n = 0$，则

$$\{u_s\}_m = \{w\}_m = \{N_n\}_m = \{M_n\}_m = \{0\}, \quad m = 1,2,\cdots,M$$

如果 $m = 1$ 为固定边，$m = 2$ 为自由边，$m = 3$ 为简支边，$m = 4$

为自由边，则

$$\{u_n\}_1=\{u_s\}_1=\{w\}_1=\{\theta\}_1=\{0\}$$

$$\{N_n\}_2=\{N_s\}_2=\{V_n\}_2=\{M_n\}_2=\{0\}$$

$$\{u_s\}_3=\{w\}_3=\{N_n\}_3=\{M_n\}_3=\{0\}$$

$$\{N_n\}_4=\{N_s\}_4=\{V_n\}_4=\{M_n\}_4=\{0\}$$

如果在式(5.168)中引入边界条件后，则式(5.168)可变为

$$[A]\{X\}=\{f\} \tag{5.176}$$

由上述可知，利用式（5.160）可以建立扁壳样条边界元法的计算格式，具体做法与薄板相同：

（1）无角点的连续边界可按图5.5处理。

（2）有角点的边界可按图5.6处理，但令 $T_k=0$；也可将角点用一个非常小的圆弧来代替，这种做法对壳体大部分区域的影响是非常小的。

（3）对于混合边界问题可按图5.8处理。

（4）域外样条边界元法按图5.10 处理。当 P 点在域外时，$C(P)=0$。

利用式(5.176)可求出扁壳的边界未知量。

（二）第二种方法

利用式(5.92)可将式(5.159)变为下列形式：

$$\sum_{m=1}^{M}\Big[\Big([N_n]_m\{u_n\}_m+[N_s]_m\{u_s\}_m+[V_n]_m\{w\}_m$$

$$+\{M_n]_m\{\theta\}_n-[U_n]_m\{N_n\}_m-[U_s]_m\{N_s\}_m-[W]_m\{V_n\}_m$$

$$+[\theta]_m\{M_n\}_m\Big)+\Big([N_{n0}]_m\{u_n'\}_m+[N_{s0}]_m\{u_s'\}_m$$

$$+[V_{n0}]_m\{w'\}_m+[M_{n0}]_m\{\theta'\}_m-[U_{n0}]_m\{N_n'\}_m$$

$$-[U_{s0}]_m\{N_s'\}_m-[W_0]_m\{V_n'\}_m+[\theta_0]_m\{M_n'\}_m\Big)\Big]$$

$$=\{f\} \tag{5.177}$$

式中 $[W_0]_{km}$, $[\theta_0]_{km}$, …, $[N_{n0}]_{km}$ 利用式(5.97)确定。由上述可知，当$U'=0$时，则式(5.177)可变为式(5.168)，而且所有记号相同。$k=1,2,3,4$。

将式(5.166)及式(5.167)代入式(5.177)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}\Big([\widetilde{N}_n]_m\{a\}_m+[\widetilde{N}_s]_m\{b\}_m+[\widetilde{V}_n]_m\{c\}_m+[\widetilde{M}_n]_m\{d\}_m$$

$$-[\widetilde{U}_n]_m\{A\}_m-[\widetilde{U}_s]_m\{B\}_m-[\widetilde{W}]_m\{C\}_m$$

$$+[\widetilde{\theta}]_m\{D\}_m=\{f\} \tag{5.178}$$

式中 $$[\widetilde{P}]_m=[P]_m[N]_m+[P_0]_m[N']_m \tag{5.179}$$

$$P=N_n,\ N_s,\ V_n,\ M_n,\ U_n,\ U_s,\ W,\ \theta \tag{5.180}$$

式(5.178)与边界条件有关。如果扁壳周边固定，由于边界条件为$u_n=u_s=w=\theta=0$，则

$$\{a\}_m=\{b\}_m=\{c\}_m=\{d\}_m=\{0\},\ m=1,2,\cdots,M \tag{5.181}$$

如果扁壳周边自由，由于边界条件为$N_n=N_s=V_n=M_n=0$，则

$$\{A\}_m=\{B\}_m=\{C\}_m=\{D\}_m=\{0\},\ m=1,2,\cdots,M \tag{5.182}$$

如果扁壳周边简支，由于边界条件为 $u_s=w=N_n=M_n=0$，则

$$\{b\}_m=\{c\}_m=\{A\}_m=\{D\}_m=\{0\},\ m=1,2,\cdots,M \tag{5.183}$$

如果 $m=1$ 为固定边，$m=2$ 为自由边，$m=3$ 为简支边，$m=4$ 为自由边，则

$$\left.\begin{aligned}&\{a\}_1=\{b\}_1=\{c\}_1=\{d\}_1=\{0\}\\&\{A\}_2=\{B\}_2=\{C\}_2=\{D\}_2=\{0\}\\&\{b\}_3=\{c\}_3=\{A\}_3=\{D\}_3=\{0\}\\&\{A\}_4=\{B\}_4=\{C\}_4=\{D\}=\{0\}\end{aligned}\right\} \tag{5.184}$$

如果在式(5.178)中引入边界条件后，则式(5.178)可变为

$$[\widetilde{A}]\{\widetilde{X}\}=\{f\} \tag{5.185}$$

利用式(5.185)求出 $\{a\}_m$、$\{b\}_m$、…、$\{D\}_m$ 后，即可利用式(5.166)求出扁壳的边界未知量。

如果将扁壳整个边界分为N等分：

$$s_0<s_1<s_2<\cdots<s_N$$

$$s_i=s_0+ih,\quad h=s_{i+1}-s_i=S/N$$

则式(5.178)可写成下列形式：

$$\begin{aligned}&[\widetilde{N}_n]\{a\}+[\widetilde{N}_s]\{b\}+[\widetilde{V}_n]\{c\}+[\widetilde{M}_n]\{d\}\\&\quad-[\widetilde{U}_n]\{A\}-[\widetilde{U}_s]\{B\}-[\widetilde{W}]\{C\}\\&\quad+[\widetilde{\theta}]\{D\}=\{f\}\end{aligned} \tag{5.186}$$

式中 $\{F\}=[W_0\ F_1\ F_2\ \cdots\ F_{N-1}\ W_N]^T$

$F=a,b,c,d,A,B,C,D$

$W=u_n,\ u_s,\ w,\ \theta,\ N_n,\ N_s,\ V_n,\ M_n$

式(5.186)为$M=1$情况下的式(5.178)。式(5.186)可变为下列形式：

$$[H]\{X_1\}-[K]\{X_2\}=\{f\} \tag{5.187}$$

式中 $\{X_1\}=[\{a\}^T \ \{b\}^T \ \{c\}^T \ \{d\}^T]^T$

$$\{X_2\}=[\{A\}^T \ \{B\}^T \ \{C\}^T \ \{D\}^T]^T$$

$$\{f\}=[\{f_1\}^T \ \{f_2\}^T \ \{f_3\}^T \ \{f_4\}^T]^T \tag{5.188}$$

$$\{f_k\}=[f_k(s_0) \ f_k(s_1) \ f_k(s_2) \ \cdots \ f_k(s_N)]^T$$

$$\left.\begin{aligned}[H]&=\left[[\widetilde{N}_n] \ [\widetilde{N}_s] \ [\widetilde{V}_n] \ [\widetilde{M}_n]\right]\\ [K]&=\left[[\widetilde{U}_n] \ [\widetilde{U}_s] \ [\widetilde{W}] \ -[\widetilde{\theta}]\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.189}$$

其中 $[\widetilde{P}]=[P][N]+[P_0][N']$ (5.190)

$$P=N_n, \ N_s, \ \cdots, \ W, \ \theta$$

$$[N]=[B][Q], \ [N']=[B'][Q] \tag{5.191}$$

$$[Q]=\mathrm{diag}([g], \ [I], \ [h]) \tag{5.192}$$

式中$[I]$为$(N-1)(N-1)$的单位矩阵，$[g]$及$[h]$由第一章式(1.21)确定；$[B]$及$[B']$分别由第三章的式(3.69)及式(3.70)确定，只要令$z=N$就行了；$[P]$由式(5.169)及式(5.170)确定，只要将式中的下标m删掉就行了；$[P_0]$由下列公式确定：

$$[P_0]=\left[[P_0]_1^T \ [P_0]_2^T \ [P_0]_3^T \ -[P_0]_4^T\right]^T \tag{5.193}$$

式中$[P_0]_k$由式(5.97)确定，只要将式中的下标m删去就行了，即

$$[P_0]_k=h[P_k^*(s_j,s_i)]_0[\lambda] \quad k=1,2,3,4 \tag{5.194}$$

式中 $P_0=N_{n0}, \ N_{s0}, \ \cdots, \ W_0, \ \theta_0$

$$\left[P_k^*(s_j,s_i)\right]_0$$

$$=\frac{h}{6}\begin{bmatrix} P_k^*(s_0,s_0) & 0 & \cdots & 0 & -P_k^*(s_0,s_N) \\ P_k^*(s_1,s_0) & 0 & \cdots & 0 & -P_k^*(s_1,s_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_k^*(s_N,s_0) & 0 & \cdots & 0 & -P_k^*(s_N,s_N) \end{bmatrix}_{(N+1)(N+1)} \tag{5.195}$$

其中 $P_k^*=N_{nk}^*,\ N_{sk}^*,\ \cdots,\ w_k^*,\ \theta_k^*$

由上述可知，式(5.189)可变为下列形式：

$$\left.\begin{aligned} [H]&=[H_1]+[N^*][H_2]+[N_0^*][H_2'] \\ [K]&=[U^*][H_2]+[U_0^*][H_2'] \end{aligned}\right\} \tag{5.196}$$

式中 $$\left.\begin{aligned} [H_2]&=\mathrm{diag}([\widetilde{N}],\ [\widetilde{N}],\ [\widetilde{N}],\ [\widetilde{N}]) \\ [H_2']&=\mathrm{diag}([\widetilde{N}'],\ [\widetilde{N}'],\ [\widetilde{N}'],\ [\widetilde{N}']) \end{aligned}\right\} \tag{5.197}$$

$$[\widetilde{N}]=h[\lambda][B][Q],\quad [\widetilde{N}']=h[\lambda][B'][Q] \tag{5.198}$$

$$[\lambda]=\mathrm{diag}(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_N) \tag{5.199}$$

$$[H_1]=\begin{bmatrix} n_x[M] & -n_y[M] & [0] & [0] \\ n_y[M] & n_x[M] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [M] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [M] \end{bmatrix} \tag{5.200}$$

$$
[N_0^*] = \begin{bmatrix} [N_{n1}^*]_0 & [N_{s1}^*]_0 & [V_{n1}^*]_0 & -[M_{n1}^*]_0 \\ [N_{n2}^*]_0 & [N_{s2}^*]_0 & [V_{n2}^*]_0 & -[M_{n2}^*]_0 \\ [N_{n3}^*]_0 & [N_{s3}^*]_0 & [V_{n3}^*]_0 & -[M_{n4}^*]_0 \\ [N_{n4}^*]_0 & [N_{s4}^*]_0 & [V_{n4}^*]_0 & -[M_{n4}^*]_0 \end{bmatrix} \tag{5.201}
$$

$$
[M] = [C][N] \tag{5.202}
$$

$$
[C] = \mathrm{diag}(c_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N) \tag{5.203}
$$

$$
[U_0^*] = \begin{bmatrix} [u_{n1}^*]_0 & [u_{s1}^*]_0 & [w_1^*]_0 & -[\theta_1^*]_0 \\ [u_{n2}^*]_0 & [u_{s2}^*]_0 & [w_2^*]_0 & -[\theta_2^*]_0 \\ [u_{n3}^*]_0 & [u_{s3}^*]_0 & [w_3^*]_0 & -[\theta_3^*]_0 \\ [u_{n4}^*]_0 & [u_{s4}^*]_0 & [w_4^*]_0 & -[\theta_4^*]_0 \end{bmatrix} \tag{5.204}
$$

$[N^*]$及$[U^*]$的形式分别与式(5.201)及式(5.204)相同，只要去掉下标0就是$[N^*]$及$[U^*]$的计算格式了。$[P_k^*]$及$[P_k^*]_0$中的$P_k^*(s_j,s_i)$可以利用式(5.73)所示的积分式进行计算，也可用配点法进行计算。式(5.188)也可以用式(5.39)确定。由式(5.39)可得：

$$
\{f\} = [\widetilde{C}]\{U_1^0\} + [U^*]\{N^0\} - [N^*]\}U_2^0\} \tag{5.205}
$$

式中 $$[\widetilde{C}] = \mathrm{diag}([C],\ [C],\ [C],\ [C]) \tag{5.206}$$

$$
\{U_1^0\} = [\{u^0\}^T\ \{v^0\}^T\ \{w^0\}^T\ \{\theta^0\}^T]^T
$$

$$\{U_2^0\}=\begin{Bmatrix}[\lambda]\{u_n^0\}\\ [\lambda]\{u_s^0\}\\ [\lambda]\{w^0\}\\ [\lambda]\{\theta^0\}\end{Bmatrix}\qquad [N^0]=\begin{Bmatrix}[\lambda]\{N_n^0\}\\ [\lambda]\{N_s^0\}\\ [\lambda]\{V_n^0\}\\ [\lambda]\{M_n^0\}\end{Bmatrix}\tag{5.207}$$

式(5.188)也可用式(5.32)确定。由式(5.32)可得：

$$\{f_k\}=[G_k^*][\lambda]\{q\}-[F_k^*][\lambda]\{q'\}\tag{5.208}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}[G_k^*]&=[G_k^*(s_j,s_i)]\\ [F_k^*]&=[F_k^*(s_j,s_i)]\end{aligned}\right\}\quad i,j=0,1,2,\cdots,N\tag{5.209}$$

$$\{q\}=[q_0\ \ q_1\ \ q_2\ \ \cdots\ \ q_N]^T$$

$$\{q'\}=[q_0'\ \ q_1'\ \ q_2'\ \ \cdots\ \ q_N']^T$$

$$q_j=q(s_j),\quad q_j'=q'(s_j)\qquad j=0,1,2,\cdots,N$$

引入边界条件后，式(5.187)可变为下列形式：

$$[A]\{X\}=\{f\}\tag{5.210}$$

利用式(5.210)求出$\{X\}$后，即可利用式(5.211)求出边界未知量：

$$\{W\}=[B][Q]\{F\}\tag{5.211}$$

式中 $\{W\}=[W_0\ \ W_1\ \ W_2\ \ \cdots\ \ W_N]^T$

（三）第三种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则

$$W(s)=\sum_{i=0}^{z} W_i\phi_i(s) \tag{5.212}$$

式中W_i为边界未知量，$W_i=W(s_i)$。将式(5.212)代入式(5.161)可得：

$$\begin{aligned}\Pi_{km}(P_0,s)=\sum_{i=0}^{z}\Big[&\Big(\int_{\Gamma_m} u^*_{nk}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)N_n(s_i)\\&+\Big(\int_{\Gamma_m} u^*_{sk}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)N_s(s_i)\\&+\Big(\int_{\Gamma_m} w^*_k(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)V_n(s_i)\\&-\Big(\int_{\Gamma_m} \theta^*_k(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)M_n(s_i)\\&-\Big(\int_{\Gamma_m} N^*_{nk}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)u_n(s_i)\\&-\Big(\int_{\Gamma_m} N^*_{sk}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)u_s(s_i)\\&-\Big(\int_{\Gamma_m} V^*_{nk}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)w(s_i)\\&+\Big(\int_{\Gamma_m} M^*_{nk}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)\theta(s_i)\Big]\end{aligned}$$

$$k=1,2,3,4 \tag{5.213}$$

将式(5.213)代入式(5.159)可得：

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M}\Big(&[N_n]_m\{u_n\}_m+[N_s]_m\{u_s\}_m+[V_n]_m\{w\}_m\\&+[M_n]_m\{\theta\}_m-[U_n]_m\{N_n\}_m-[U_s]_m\{N_s\}_m\\&-[W]_m\{V_n\}_m+[\theta]_m\{M_n\}_m\Big)=\{f\}\end{aligned} \tag{5.214}$$

$$\left.\begin{aligned}
[N_n]_m &= [E_1]_m + [N_n^*]_m \\
[N_s]_m &= [E_2]_m + [N_s^*] \\
[V_n]_m &= [E_3]_m + [V_n^*]_r \\
[M_n]_m &= [E_4]_m - [M_n^*]_m
\end{aligned}\right\} \tag{5.215}$$

$$\begin{aligned}
&[U_n]_m = [u_n^*],\ [U_s]_m = [u_s^*]_m \\
&[W]_m = [w^*],\ [\theta]_m = [\theta^*]_m
\end{aligned} \tag{5.216}$$

其中 $[P^*]_m = \left[[P_1^*]_m^T \quad [P_2^*]_m^T \quad [P_3^*]_m^T \quad [P_4^*]_m^T\right]^T$

$P^* = N_n^*,\ N_s^*,\ \cdots,\ w^*,\ \theta^*$

$$P_k^* = \int_{\Gamma_m} P_k^*(s_j, s)\phi_i(s)d\Gamma(s) \tag{5.217}$$

引入边界条件后，式(5.214)可以变为下列形式：

$$[A]\{X\} = \{f\}$$

（四）第四种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则

$$W(s) = [\varphi_{3e}(s)][Q]_m\{W\}_m \tag{5.218}$$

将式(5.218)代入式(5.161)可得：

$$\Pi_{km}(P_0, s) = \left(\int_{\Gamma_m} u_{nk}^*(P_0, s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{N_n\}_m$$

$$+ \left(\int_{\Gamma_m} u_{sk}^*(P_0, s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{N_s\}_m$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_{\Gamma_m} w_k^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{V_n\}_m \\
&-\left(\int_{\Gamma_m} \theta_k^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{M_n\}_m \\
&-\left(\int_{\Gamma_m} N_{nk}^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{u_n\}_m \\
&-\left(\int_{\Gamma_m} N_{sk}^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{u_s\}_m \\
&-\left(\int_{\Gamma_m} V_{nk}^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{w\}_m \\
&+\left(\int_{\Gamma_m} M_{nk}^*(P_0,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right)[Q]_m\{\theta\}_m \\
&\qquad k=1,2,3,4 \qquad (5.219)
\end{aligned}
$$

式中　$[Q]_m=[B]_m^{-1}$

$[B]_m$ 由第一章式(1.130)确定。将式(5.219)代入式(5.159)可得：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{M}\Big([N_n]_m\{u_n\}_m+[N_s]_m\{u_s\}_m+[V_n]_m\{w\}_m \\
&\quad+[M_n]_m\{\theta\}_m-[U_n]_m\{N_n\}_m-[U_s]_m\{N\}_m \\
&\quad-[W]_m\{V_n\}_m+[\theta]_m\{M_n\}_m\Big)=\{f\} \qquad (5.220)
\end{aligned}
$$

式中$[N_n]_m$，$[N_s]_m$，…，$[W]_m$及$[\theta]_m$的形式与式(5.215)及式(5.216)相同，但这时

$$
[P_k^*]_m=\left[\int_{\Gamma_m} P_k^*(s_j,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma\right][Q]_m \qquad (5.221)
$$

式(5.221)可利用高斯求积公式进行计算。

（五）第五种方法

设 $$W(s)=[\varphi_{3e}][Q]_m\{F\}_m \tag{5.222}$$

式中 $F=a,\ b,\ c,\ d,\ A,\ B,\ C,\ D$

$$\{F\}_m=[W_0\ \cdots\ F_1\ F_2\ \cdots\ F_{s-1}\ W_s]_m^T$$

$$W=u_n,\ u_s,\ w,\ \theta,\ N_n,\ N_s,\ V_n,\ M_n$$

则 $$\{W\}_m=[N]_m\{F\}_m \tag{5.223}$$

式中 $$[N]_m=[B]_m[Q]_m$$

$$[Q]_m=\mathrm{diag}([g],\ [I],\ [h]) \tag{5.224}$$

其中$[I]$为$(z-1)(z-1)$的单位矩阵，$z=N_m$；$[g]$及$[h]$由第三章式(3.127)确定；$[B]_m$由第一章式(1.130)确定。将式(5.222)代入式(5.159)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}\Big([N_n]_m\{a\}_m+[N_s]_m\{b\}_m+[V_n]_m\{c\}_m+[M_n]_m\{d\}_m-[U_n]_m\{A\}_m-[U_s]_m\{B\}_m-[W]_m\{C\}_m+[\theta]_m\{D\}_m\Big)=\{f\} \tag{5.225}$$

式中$[N_n]_m$，$[N_s]_m$，…，$[W]_m$及$[\theta]_m$的形式与式(5.215)及式(5.216)相同，而且利用式(5.221)确定$[N_n]_{km}$，$[N_s]_{km}$，…，$[W]_{km}$及$[\theta]_{km}$，但$[Q]_m$必须由式(5.224)确定。利用式(5.225)可求出$\{a\}_m$,$\{b\}_m$,…,$\{c\}_m$及$\{D\}_m$，但注意引入边界条件。

当边界未知量确定后，利用式(5.25)即可求出域内任一点P的位移值。u、v及w对域内任一点P的偏导数为

$$\partial u(P)=\sum_{m=1}^{M}\partial\prod_{1m}(P,s_i)+\partial f_1(P)$$

$$\partial v(P)=\sum_{m=1}^{M}\partial\prod_{2m}(P,s_i)+\partial f_2(P) \tag{5.226}$$

$$\partial^2 w(P)=\sum_{m=1}^{M}\partial^2\prod_{3m}(P,s_i)+\partial^2 f_3(P)$$

式中∂F及$\partial^2 F$分别表示F对P点求一阶导数及二阶导数，即

$$\partial u=\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\qquad \partial v=\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\partial^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{5.227}$$

利用式(5.226)确定式(5.227)后，即可利用式(5.4)及式(5.5)求出扁壳的内力值。

§5.5 中厚板的样条边界元法

胡海昌巧妙地引入两个位移函数F及f，将Reissner 型板问题归结为两个独立的微分方程[10]：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^4 F=q/D\\&\frac{1}{2}(1-\mu)D\nabla^2 f-Cf=0\end{aligned}\right\} \tag{5.228}$$

及相应的边界条件，为求解 Reissner 型板开拓了一个新的途径。

在上述基础上可以建立几种边界积分方程。例如：（1）利用功的互等定理建立的边界积分方程；（2）利用虚功原理建立的边界积分方程；（3）利用变分原理或加权残数法建立的边界

积分方程。本节只介绍第一种边界积分方程[11]。

（一）边界积分方程

对于等厚度的各向同性板，内力与位移有下列关系：

$$
\left.\begin{aligned}
M_n &= -D\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial n} + \mu \frac{\partial \psi_t}{\partial t}\right) \\
M_{nt} &= -\frac{1}{2}(1-\mu) D\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial t} + \frac{\partial \psi_t}{\partial n}\right) \\
Q_n &= C\left(\frac{\partial w}{\partial n} - \psi_n\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (5.229)
$$

式中 w 为板的挠度，ψ_n 及 ψ_t 分别为法线 n 及切线 t 的转角（图5.11）；C 及 D 分别为板的剪切刚度及弯曲刚度；Q_n，M_n 及M_{nt} 分别为剪力，弯矩及扭矩。

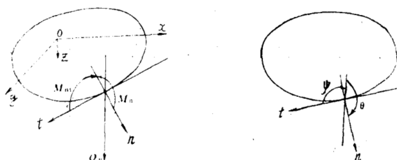


图5.11

由功的互等定理可知：

$$
\begin{aligned}
&\int_\Gamma [Q_n^* w - M_n^* \psi_n + M_{nt}^* \psi_t] d\Gamma \\
&\qquad + \int_\Omega (m_n^* \psi_n + m_t^* \psi_t + q^* w) d\Omega \\
&\qquad = \int_\Gamma [Q_n w^* - M_n \psi_n^* + M_{nt} \psi_t^*] d\Gamma
\end{aligned}
$$

$$+\int_{\Omega}(m_n\psi_n^* + m_t\psi_t^* + qw^*)\,d\Omega \tag{5.230}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} w^* &= F^* - D\nabla^2 F^*/C \\ \psi_n^* &= \frac{\partial F^*}{\partial n} + \frac{\partial f^*}{\partial t} \\ \psi_t &= \frac{\partial F^*}{\partial t} - \frac{\partial f^*}{\partial n} \end{aligned}\right\} \tag{5.231}$$

F^*及f^*分别满足下列微分方程：

$$D\nabla^4 F^* = \delta(P,Q) \tag{5.232}$$

$$\frac{1}{2}(1-\mu)D\nabla^2 f^* - Cf^* = \delta(P,Q) \tag{5.233}$$

由式（5.232）及式（5.233）可得：

$$\left.\begin{aligned} F^* &= \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \\ f^* &= \frac{\lambda^2}{2\pi C} K_0(\lambda r) \end{aligned}\right\} \tag{5.234}$$

式中 r 为 P 点及 Q 点之间的距离，K_0 为零阶修正的贝塞尔函数。

如果 $m_n = m_t = 0$，$m_n^* = m_t^* = 0$，$q^* = \delta(P,Q)$ 则由式（5.230）可得：

$$C(P)w(P) = \int_{\Gamma}[w_1^* Q_n - \psi_{n1}^* M_n + \psi_{t1}^* M_{nt} - Q_{n1}^* w + M_{n1}^* \psi_n - M_{nt1}^* \psi_t]d\Gamma + f_1(P) \tag{5.235}$$

如果 $m_n = m_t = q^* = m_t^* = 0$，$m_n^* = \delta(P,Q)$ 则由式（5.230）可得：

$$C(P)\psi_n(P) = \int_{\Gamma}[w_2^* Q_n - \psi_{n2}^* M_n + \psi_{t2}^* M_{nt} - Q_{n2}^* w$$

$$+M^*_{n2}\psi_n-M^*_{nt2}\psi_t]d\Gamma+f_2(P) \quad (5.236)$$

式中 $C(P)$ 为奇性系数，由式（5.24）决定。

将式（5.235）及式（5.236）代入式（5.229）第三式可得：

$$C(P)Q(P)=\int_\Gamma[w^*_3Q_n-\psi^*_{n3}M_n+\psi^*_{n3}M_n+\psi^*_{t3}M_{nt}$$
$$-Q^*_{n3}w+M^*_{n3}\psi_n-M^*_{nt3}\psi_t]d\Gamma+f_3(P)$$
$$(5.237)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&w^*_3=C(w^*_4-w^*_2),\ \psi^*_{n3}=C(\psi^*_{n4}-\psi^*_{n2})\\&\psi^*_{t3}=C(\psi^*_{t4}-\psi^*_{t2}),\ Q^*_{n3}=C(Q^*_{n4}-Q^*_{n2})\\&M^*_{n3}=C(M^*_{n4}-M^*_{n2}),M^*_{nt3}=C(M^*_{nt4}-M^*_{nt2})\end{aligned}\right\}(5.238)$$

$$\left.\begin{aligned}&U^*_4=\partial U^*_1/\partial n(P)\\&U^*_k=w^*_k,\ \psi^*_{nk},\ \psi^*_{tk},\ Q^*_{nk},\ M^*_{nk},\ M^*_{ntk}\end{aligned}\right\}(5.239)$$

$$f_k(P)=\int_\Omega q(Q)w^*_k(P,Q)d\Omega(Q),\quad k=1,2,3 \quad (5.240)$$

U^*_1 及 U^*_4 只与 F^* 有关，在它们的表达式中，$f^*=0$；U^*_2只与 f^* 有关，在它们的表达式中，$F^*=0$；w^*_1、ψ^*_{n1},ψ^*_{t1}及w^*_2、ψ^*_{n2}、ψ^*_{t2}由式（5.231）决定，M^*_{n1}、M^*_{nt1}、Q^*_{n1}及M^*_{n2}、M^*_{nt2}、Q^*_{n2} 由式（5.229）决定。式（5.240）可以化为边界积分。U^*_k 的具体形式见本章附录。

边界条件为

$$w=\overline{w},\quad \psi_n=\overline{\psi_n},\quad \psi_t=\overline{\psi_t}\qquad \text{on } \Gamma_1$$

$$w=\overline{w},\quad M_n=\overline{M}_n,\quad \psi_t=\overline{\psi_t}\qquad \text{on } \Gamma_2$$

$$Q_n=\overline{Q}_n,\quad M_n=\overline{M}_n,\quad M_{nt}=\overline{M}_{nt}\qquad \text{on } \Gamma_3$$

式中 Γ_1 为固定边，Γ_2 为简支边，Γ_3 为自由边。

（二）样条边界元法

如果将整个边界 Γ 分为（图5.5，图5.6），则有

$$C(P_o)\,u_k(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_k(P_0,s)+f_k(P_0)\qquad k=1,2,3 \tag{5.241}$$

式中 $\quad u_1=w,\quad u_2=\psi_n,\quad u_3=Q_n$

利用式（5.241）可以建立样条边界元法的计算格式，具体做法有五种方法，本节只介绍第五种方法。

如果边界未知量用三次 B 样条函数逼近，则

$$\left.\begin{aligned}
w(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{a\}_m\\
\psi_n(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{b\}_m\\
\psi_t(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{c\}_m\\
Q_n(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{A\}_m\\
M_n(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{B\}_m\\
M_{nt}(s)&=[\varphi_{3e}][Q]_m\{C\}_m
\end{aligned}\right\} \tag{5.242}$$

由此可得：

$$\{W\}_m=[N]_m\{F\}_m \tag{5.243}$$

式中 $\qquad W=w,\ \psi_n,\ \psi_t,\ Q_n,\ M_n,\ M_{nt}$

$\qquad F=a,\ b,\ c,\ A,\ B,\ C$

将式（5.242）代入式（5.241）可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([Q_n]_m\{a\}_m+[M_n]_m\{b\}_m+[M_{nt}]_m\{c\}_m$$

$$+[W]_m\{A\}_m+[\psi_n]_m\{B\}_m+[\psi_t]_m\{C\}_m=\{f\} \quad (5.244)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&[Q_n]_m=[E_1]_m+[Q_n^*]_m\\&[M_n]_m=[E_2]_m-[M_n^*]_m\\&[M_{nt}]_m=[M_{nt}^*]_m\end{aligned}\right\} \quad (5.245a)$$

$$\begin{aligned}&[W]_m=[E_3]_m-[W^*]_m\\&[\psi_n]_m=[\psi_n^*],\qquad [\psi_t]_m=[\psi_t^*]_m\end{aligned} \quad (5.245b)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&[E_1]_m=[\,([C]_m^B)^T\quad [0]^T\quad [0]^T\,]^T\\&[E_2]_m=[\,[0]^T\quad ([E]_m^B)^T\quad [0]^T\,]^T\\&[E_3]_m=[\,[0]^T\quad [0]^T\quad ([C]_m^B)^T\,]^T\end{aligned}\right\} \quad (5.245c)$$

$$[U^*]_m=[\,[U_1^*]_m^T\quad [U_2^*]_m^T\quad [U_3^*]^T\,]^T \quad (5.245d)$$

$$U^*=w^*,\quad \psi_n^*,\quad \psi_t^*,\quad Q_n^*,\quad M_n^*,\quad M_{nt}^*$$

$$[U_k]_m=[\int_{\Gamma_m}U_k^*(s_j,s)[\varphi_{3e}(s)]d\Gamma][Q]_m \quad (5.245e)$$

在上述各式中，$[B]_m$及$[Q]_m$分别由第一章式(1.130)及式(5.224)确定；$[0]$为$(N+1)(z+1)$的矩阵；$[C]_m^B$为$[C]_m$扩大的$(N+1)(z+1)$的矩阵，$[C]_m$由式(5.68)确定；$[U_k^*]_m$为$(N+1)(z+1)$的矩阵；N为整个边界Γ的分段数，$z=N_m$，N_m为边界Γ_m的分段数，见图5.5及图5.6。

式(5.244)与边界条件有关。如果板整个边界为固定边，由于边界条件为$w=\psi_n=\psi_t=0$，则

$$\{a\}_m=\{b\}_m=\{c\}_m=\{0\} \qquad m=1,\ 2,\ \cdots,\ M$$

如果板整个边界 Γ 为自由边，由于边界条件为 $Q_n=M_n=M_{nt}=0$，则

$$\{A\}_m=\{B\}_m=\{C\}_m=\{0\} \qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots M$$

如果板整个边界Γ为简支边，由于边界条件为 $w=\psi_t=M_n=0$，则

$$\{a\}_m=\{c\}_m=\{B\}_m=\{0\} \qquad m=1,\ 2,\ \cdots,\ M$$

如果 $m=1$ 为固定边，$m=2$ 为自由边，$m=3$ 为简支边，$m=4$ 为自由边，则

$$\{a\}_1=\{b\}_1=\{c\}_1=\{0\}$$

$$\{A\}_2=\{B\}_2=\{C\}_2=\{0\}$$

$$\{a\}_3=\{c\}_3=\{B\}_3=\{0\}$$

$$\{A\}_4=\{B\}_4=\{C\}_4=\{0\}$$

如果在式（5.244）中引入边界条件后，则式（5.244）便变为

$$[A]\{X\}=\{f\} \tag{5.246}$$

利用式（5.246）求出 $\{a\}_m$，$\{b\}_m$，$\cdots$，$\{C\}_m$后，即可利用式(5.243)求出边界未知量。当边界未知量确定后，利用式(5.235)及式(5.236)即可求出区域内任一点 P 的位移值。当位移值确位后，利用式（5.229）即可求出 Reissner 型板的内力值

（三）角点支撑的中厚板

如果中厚板只有角点支撑（图5.9），则式（5.241）便变为

$$C(P)u_k(P)=\int_\Gamma[-Q^*_{nk}(P,Q_0)w(Q_0)$$

$$+M^*_{nk}(P,Q_0)\psi_n(Q_0)$$

$$-M^*_{ntk}(P,Q_0)\psi_t(Q_0)]d\Gamma(Q_0)$$

$$+T_k(P)+f_k(P) \tag{5.247}$$

式中 $T_k(P)=\sum_{(l)} w_k^*(PA_l)F(A_l)$

其中 $F(A_l)$ 为角点的支座反力，$l=1, 2, \cdots, L$。

（四）域外奇点的样条边界元法

对于中厚板，域外奇点的样条边界元法可按图5.10处理。因为当 P点在域外时，$C(P)=0$，因此，域外奇点样条边界元法计算格式与式（5.244）相同，只是 $C(P)=0$。注意P点在虚边界Γ^*上。

§5.6 开孔板壳的样条边界元法

在实际板壳中，经常遇到开孔问题。因此，研究开孔板壳的计算方法是一个很有意义的课题。本节介绍开孔板壳的样条边界元法。

（一）开孔板的样条边界元法

图5.12是一个开孔薄板，边界包括边界 Γ_1及内洞边界Γ_2。开孔薄板的边界积分方程仍然用式（5.40）～式（5.42），但边界Γ 包括边界Γ_1及内洞边界Γ_2，即 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$。

如果将外边界分为M_1个区域，将内洞边界分为M_2个区域，而且将每个区域分为 N_m 等分（图5.13），则式（5.40）～式（5.42）可变为

$$C(P_0)u_k(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,s_i)+T_k+f_k \tag{5.248}$$

式中 $u_1=w$，$u_2=\theta$，$u_3=\psi$；$M=M_1+M_2$；$k=1, 2, 3$；$\Pi_{km}(P_0,s_i)$，T_k及 f_k 分别由式（5.56），式（5.17）及式

（5.57）确定。

如果用三次B样条函数表示边界未知量，见式（5.99）或式（5.115），则由式（5.248）可以建立开孔薄板样条边界元法的

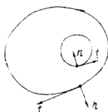
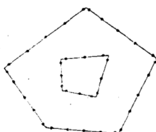


图5.12


图5.13

计算格式，形式与§5.3的形式相同。因此．本节开孔薄板可以直接采用§5.3的计算格式。对于开孔中厚板，可以直接采用§5.5的计算格式。

域外奇点样条边界元法的计算格式也与§5.3的形式相同，但对外边界的奇点向域外移，$\gamma_1>1$；对内边界的奇点往洞内移，$\gamma_2<1$（图5.14）。一般γ_1取1.10～3.50，γ_2取0.70～0.90。

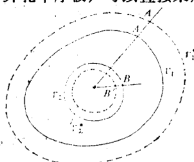


图5.14

（二）开孔扁壳的样条边界元法

如果将外边界分为M_1个区域，将内洞边界分为M_2个区域，而且每个区域分为N_m等分（图5.13），则式（5.25）及式（5.26）可变成式（5.160）的形式，式中$M=M_1+M_2$。由此可知，本节开孔扁壳可以直接采用§5.4的计算格式。域外奇点样条边界元法按图5.14处理，这时§5.14的计算格式。域外奇点样条边界元法按图5.14处理，这时§5.4中各式的$C(P)$都为零。

利用上述方法可求出开孔扁壳的内力，即 N'_n、N'_s、N'_{ns}、M'_n、M'_s、M'_{ns}、V'_n 及 V'_s 。它们可以用下列形式表示：

$$F' = \widetilde{F} + F \qquad (5.249)$$

式中 F' 代表开孔扁壳的内力；$\widetilde{F}$ 代表同一个不开孔的扁壳在同样荷载及边界条件下的内力；F 是由于孔洞存在而引起的附加内力，它代表壳体孔洞附近的应力集中现象。

实验和计算结果表明，壳体孔洞附近的应力集中具有局部性质，它离开孔洞而迅速衰减。由此可知，F 都是坐标的快速衰减函数。如果壳体孔边离开壳体边界较远（例如，超过孔洞最大尺寸的四倍），则孔洞应力集中对边界的干扰可以忽略不计。因此，这种情况相当于无限扁壳开孔问题。

由于 F' 及 $\widetilde{F}$ 都是在相同的荷载和边界条件下满足相同的壳体基本微分方程组，因此，由式（5.249）可知，为了求解 F，我们由式（5.1）可以导出下列齐次微分方程组：

$$\left.\begin{aligned} L_x(u,v,w) &= 0 \\ L_y(u,v,w) &= 0 \\ L_z(u,v,w) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.250)$$

由上述可知，求解 F 的问题可归结为在一定边界条件下求解式（5.250）所示微分方程组的问题。这些边界条件就是无限扁壳的孔洞边界条件及无限远处边界条件。

壳体无限远处的边界条件就是离开孔边足够远处的壳体这部分区域的条件（图5.15）。根据孔洞附近应力集中的局部性质，在离开孔边足够远处，由于孔洞存在引起的附加内力及位移都为零。因此，壳体无限远处的边界条件都为零。

在孔边上，可以给定各种边界条件，例如，内力边界条件；位移边界条件；混合边界条件。对于内力边界条件，可以写成下列形式：

$$
\left.
\begin{aligned}
N_n = q_1 - \widetilde{N}_n, \quad & N_{ns} = q_2 - \widetilde{N}_{ns} \\
V_n = q_3 - \widetilde{V}_n, \quad & M_n = q_4 - \widetilde{M}_m
\end{aligned}
\right\}
\qquad (5.251)
$$

式中 q_1，q_2，q_3及q_4是沿孔边作用的外力；$\widetilde{N}_n$、…、$\widetilde{M}_n$ 是壳体无孔洞时内力。

虽然可以从式（5.250）出发求解壳体孔洞附近的应力集中问题，但这不是经济有效的方法。如果利用样条边界元法求解壳体孔洞附近的应力集中问题，则效果很好。

（三）壳体孔洞应力集中的样条边界元法

壳体孔洞应力集中问题是一个很有意义的研究课题，虽然有限元法可以解决这个问题，但它解这个问题时也不是一个经济有效的方法。如果采用样条边界元法解这个问题，则效果比有限元法好得多，计算简便，精度高，而且可以用微机或小机解题。因此，本节介绍样条边界元法求解壳体孔洞附近的应力集中问题。

由于壳体应力集中具有局部性质，因此可以按开孔无限扁壳计算壳体孔洞附近的应力集中问题。由式（5.25）及式（5.26）可得：

$$
\begin{aligned}
C(P)u_k(P) = \int_{\Gamma} [& u^*_{nk}(P,s)N_n(s) + u^*_{sk}(P,s)N_s(s) \\
& + w^*_k(P,s)V_n(s) - \theta^*_k(P,s)M_n(s) \\
& - N^*_{nk}(P,s)u_n(s) - N^*_{sk}(P,s)u_s(s) \\
& - V^*_{nk}(P,s)w(s) + M^*_{nk}(P,s)\theta(s)]\,d\Gamma(s) \\
& k = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \qquad (5.252)
\end{aligned}
$$

式中 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$。$\Gamma_2$是孔洞边界，$\Gamma_1$是无限远处边界，利

用式（5.252）可以导出不同的求解壳体应力集中问题的方法。

如果P点在壳体边界Γ上，而且孔边条件为式（5.251），则式（5.252）便变为

$$C(P_0)\,u_k(P_0)=-\int_{\Gamma_2}[N^*_{nk}(P_0,s)\,u_n(s)+N^*_{sk}(P_0,s)\,u_s(s)-V^*_{nk}(P_0,s)w(s)-M^*_{nk}(P_0,s)\theta(s)]d\Gamma(s)+f_k(P_0) \tag{5.253}$$

式中 $f_k(P_0)=\int_{\Gamma_2}[u^*_{nk}(P_0,s)N_n(s)+u^*_{sk}(P,s)N_s(s)+w^*_k(P_0,s)V_n(s)-\theta^*_k(P_0,s)M_n(s)]d\Gamma(s)$ （5.254）

如果P点在孔洞内，则 $C(P)=0$，因此式（5.252）便变为下列形式：

$$-\Pi_k(P,s)+f_k(P)=0 \tag{5.255}$$

式中 $\Pi_k(P,s)$ 及 $f_k(P)$ 可以分别利用式（5.253）右边的积分项及式（5.254）确定，只要将 P_0变为P就行了。

式（5.253）或式（5.255）是壳体孔洞应力集中问题的边界积分方程，利用它们可以建立样条边界元法的计算格式，具体做法与§5.4相同。利用式（5.255）建立的是域外奇点样条边界元法的计算格式，这种计算格式可以完全避免奇异积分。

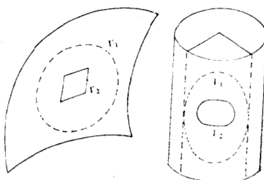


图5.15

上述建立的样条边界元法是直接法，还可以建立壳体孔洞应力集中问题的样条

边界元间接法。

§5.7 扁壳的基本解

扁壳的基本解是一个需要研究的重要课题。目前采用下列两种方法求解扁壳的基本解：（1）三角数级数法[3][4]；（2）平面波分解法[14][4]。

如果扁壳的基本解为

$$u_i^* = D_{1i}F,\quad v_i^* = D_{2i}F,\quad w_i^* = D_{3i}F,$$

$$i = 1,\ 2,\ 3 \tag{5.256}$$

则式（5.1）所示的扁壳的基本微分方程便变为

$$\nabla^8 F + (Ed/D)\nabla_k^4 F = -\delta(x-\xi, y-\eta)/D \tag{5.257}$$

式中 $\nabla^8 = \nabla^4\nabla^4,\quad \nabla^4 = \nabla^2\nabla^2,\quad \nabla_k^4 = \nabla_k^2\nabla_k^2$

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \tag{5.258}$$

$$\nabla_k^2 F = k_2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k_1\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$D_{11} = \frac{d^2}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\nabla^4 + (k_1^2$$

$$+ 2\mu k_1 k_2 + k_2^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1+\mu)k_1^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$D_{12} = D_{21} = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{d^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\nabla^4$$

$$-(k_1 - k_2)^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

$$D_{13}=D_{31}=(k_1+\mu k_2)\frac{\partial^3}{\partial x^3}+[(2+\mu)k_1$$

$$-k_2]\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}$$

$$D_{22}=\frac{d^2}{12}\left(\frac{2}{1-\mu}\quad\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\nabla^4$$

$$+2(1+\mu)k_2^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(k_1^2+2\mu k_1k_2+k_2^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$D_{23}=D_{32}=(k_2+\mu k_1)\frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$+[(2+\mu)k_2+k_1)]\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}$$

$$D_{33}=\nabla^4 \qquad (5.259)$$

其中 d 是扁壳的厚度。

F 是式(5.257)的解，它可以利用三角级数法或平面波分解法求出来。当 F 确定后，扁壳的基本解利用式(5.256)很容易确定。当 u_k^*、v_k^* 及 w_k^* 确定，利用式(5.4)至式(5.11)有关公式，即可确定 u_n^*，u_s^*，θ_n^*，…，M_{nk}^*。

(一)三角级数法[4]-[6]

因为具有任意边界条件的双曲扁壳的基本解可以采用四边简支的双曲扁壳的格林函数，因此，式(5.257)的解可以采用下列形式：

$$F(P,Q)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}A_{mn}\sin\mu_m\xi\sin\mu_n\eta\sin\mu_m x\sin\mu_n y \qquad (5.260)$$

式中 $A_{mn}=4/(abDT_{mn})$ (5.261)

$T_{mn}=(\mu_m^2+\mu_n^2)-(Ed/D)(k_2\mu_m^2+k_1\mu_n^2)^2$ (5.262)

$\mu_m = m\pi/a, \qquad \mu_n = n\pi/b$

在一般情况，式（5.260）只取前面少数几项就行了。在实际中，式（5.260）取 $m=n=1$ 就得满意的解。这种基本解只适合双曲扁壳，对于任意形状的扁壳，可以利用平面波分解法确定 F。

（二）平面波解法[13]

如果设 $$F(\rho)=\int_0^{2\pi}\widetilde{F}(\rho)d\theta \qquad (5.263)$$

$$\delta(\rho)=\int_0^{2\pi}\rho^{-2}d\theta/4\pi^2 \qquad (5.264)$$

$$\rho=(x-\xi)\cos\theta+(y-\eta)\mathrm{Sin}\theta \qquad (5.265)$$

式中（$\cos\theta,\sin\theta$）为单位圆周上任一点的坐标。

将式（5.263）、式（5.264）及式(5.265)代入式（5.257）可得：

$$\frac{d^8\widetilde{F}}{d\rho^8}+\varepsilon^2\frac{d^4\widetilde{F}}{d\rho^4}=-\rho^{-2}/4\pi^2 D \qquad (5.266)$$

式中 $$\varepsilon^2=4\lambda^4=12(1-\mu^2)(k_2\cos\theta+k_1\sin\theta)/t^2 \qquad (5.267)$$

其中 t 为扁壳的厚度，ε 是扁壳分析中的一个小参数。

如果设式（5.266）的解为

$$\widetilde{F}(\rho)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{2j}\varphi_j(\rho) \qquad (5.268)$$

对于无限大扁壳，利用小参数法可得：

$$\widetilde{F}(\rho)=\Big[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(\sqrt{2}\lambda\rho)^{4m+2}(\ln|\sqrt{2}\lambda\rho|$$

$$-K(4m+2)+r)/(4m+2)!$$

$$+\frac{\pi}{4}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(\sqrt{2}\lambda\rho)^{4m}/4m!\ \Big]\Big/32\pi^2\lambda^6 D$$

(5.269)

式中 $K(4m+2)=K(j)=\sum_{n=1}^{j}(\frac{1}{n})$，$r=0.57721$ (5.270)

将式(5.269)代入式(5.263)可得 $F(\rho)$；将 $F(\rho)$代入式(5.256)便得

$$\left.\begin{aligned} &u_i^*=\int_0^{2\pi}\widetilde{u}_i^*\,d\theta \qquad v_i^*=\int_0^{2\pi}\widetilde{v}_i^*\,d\theta \\ &w_i^*=\int_0^{2\pi}\widetilde{w}_i^*\,d\theta \quad i=1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \tag{5.271}$$

式中 $\widetilde{u}_i^*=C_{1i}\widetilde{F}(\rho)$，$\widetilde{v}_i^*=C_{2i}\widetilde{F}(\rho)$，$\widetilde{w}_i^*=C_{3i}\widetilde{F}(\rho)$

(5.272)

$$C_{11}=\frac{t^2}{12}(\cos^2\theta+\frac{2}{1-\mu}\sin^2\theta)\frac{d^6}{d\rho^6}$$

$$+[k_1^2(1+\sin^2\theta)+2\mu k_1(k_2\cos^2\theta+k_1\sin^2\theta)$$

$$+k_2^2\cos^2\theta\Big]\frac{d^2}{d\rho^2}$$

$$C_{12}=C_{21}=-\frac{1+\mu}{1-\mu}\ \frac{t^2}{12}\sin\theta\cos\theta\frac{d^6}{d\rho^6}$$

$$-(k_1-k_2)^2\sin\theta\cos\theta\frac{d^2}{d\rho^2}$$

$$C_{13}=C_{31}=[\ k_1\cos\theta(1+\sin^2\theta)+\mu\cos\theta(k_2\cos^2\theta$$

$$+k_1\sin^2\theta)-k_2\cos\theta\sin^2\theta\ ]\frac{d^3}{d\rho^3}$$

$$C_{22}=\frac{t^2}{12}\left(\frac{2}{1-\mu}\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\frac{d^6}{d\rho^6}$$

$$+[k_2^2(1+\cos^2\theta)+2\mu k_2(k_2\cos^2\theta+k_1\sin^2\theta)]\frac{d^2}{d\rho^2}$$

$$C_{23}=C_{32}=[k_2\sin\theta(1+\cos^2\theta)+\mu\sin\theta(k_2\cos^2\theta$$

$$+k_1\sin^2\theta)-k_1\cos^2\theta\sin\theta]\frac{d^3}{d\rho^3}$$

$$C_{33}=\frac{d^4}{d\rho^4} \qquad (5.273)$$

$\widetilde{F}(\rho)$ 也可采用下列形式[4]：

$$\widetilde{F}(\rho)=\Big[\operatorname{sh}\lambda\rho\sin\lambda\rho\ln|\sqrt{2}\lambda\rho|+\frac{\pi}{4}\operatorname{ch}\lambda\rho\cos\lambda\rho$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(\sqrt{2}\lambda\rho)^{4m+2}(K(4m+2)$$

$$+r)\Big/(4m+2)!\Big]\Big/32\pi^2\lambda^6 D \qquad (5.274)$$

或 $$\widetilde{F}(\rho)=(\lambda^2\rho^2\ln|\rho|-\operatorname{sh}\lambda\rho\sin\lambda\rho\ln|\sqrt{2}\lambda\rho|$$

$$-\frac{\pi}{4}\operatorname{ch}\lambda\rho\cos\lambda\rho)/32\pi^2\lambda^6 D \qquad (5.275)$$

（三）直 接 法[3]

这个方法是利用三角级数法直接由式（5.1）求基本解的方法，实际上是三角级数法。

如果扁壳只受 x 方向的单位集中力，则式（5.1）便变为

$$L_x(u_1^*,\ v_1^*,\ w_1^*)=-\delta(P,Q)/B$$

$$L_y(u_1^*,\ v_1^*,\ w_1^*)=0,\ L_z(u_1^*,\ v_1^*,\ w_1^*)=0 \qquad (5.276)$$

对于四边简支扁壳，由上式可得

$$u_1^*(P,Q)$$

$$=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}A_{mn}\cos\frac{m\pi}{a}\xi\sin\frac{n\pi}{b}\eta\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$v_1^*(P,Q)$$

$$=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}B_{mn}\cos\frac{n\pi}{a}\xi\sin\frac{m\pi}{b}\eta\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$w_1^*(P,Q)$$

$$=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}C_{mn}\cos\frac{m\pi}{a}\xi\sin\frac{n\pi}{b}\eta\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

（5.277）

式中 $$A_{mn}=\frac{4}{abB}\;\frac{T_5T_6-T_4T_4}{\Delta},$$

$$B_{mn}=\frac{4}{abB}\;\frac{T_3T_4-T_2T_6}{\Delta},$$

$$C_{mn}=\frac{4}{abB}\;\frac{T_2T_4-T_3T_5}{\Delta}$$ （5.278）

这里 $$\Delta=T_1T_5T_6+2T_2T_3T_4-T_3T_3T_5-T_1T_4T_4-T_2T_2T_6$$ （5.279）

$$T_1=\mu_m^2+\frac{1-\mu}{2}\mu_n^2,\qquad T_2=\frac{1+\mu}{2}\mu_m\mu_n$$

$$T_3=(k_1+\mu k_2)\mu_m,\qquad T_4=(k_2+\mu k_1)\mu_n$$

$$T_5=\frac{1-\mu}{2}\mu_m^2+\mu_n^2,\qquad T_7=\mu_m^2+\mu_n^2$$

$$T_6=k_1^2+k_2^2+2\mu k_1k_2+\frac{d^2}{12}T_7^2$$

$$\mu_m=m\pi/a,\qquad \mu_n=n\pi/b$$

如果扁壳只受 y 方向的单位集中力，则式（5.1）便变为

$$L_x(u_2^*,\ v_2^*,\ w_2^*) = 0$$

$$L_y(u_2^*,\ v_2^*,\ w_2^*) = -\delta(P,Q)/B$$

$$L_z(u_2^*,\ v_2^*,\ w_2^*) = 0 \tag{5.280}$$

对于四边简支扁壳，由上式可得：

$$u_2^*(P,Q) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} A_{mn}\sin\mu_m\xi\cos\mu_n\eta\cos\mu_m x\sin\mu_n y$$

$$v_2^*(P,Q) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} B_{mn}\sin\mu_m\xi\cos\mu_n\eta\sin\mu_m x\cos\mu_n y$$

$$w_3^*(P,Q) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} C_{mn}\sin\mu_m\xi\cos\mu_n\eta\sin\mu_m x\sin\mu_n y \tag{5.281}$$

式中 $$A_{mn} = \frac{4}{abB}\ \frac{T_3T_4 - T_2T_6}{\Delta},$$

$$B_{mn} = \frac{4}{abB}\ \frac{T_1T_6 - T_3T_3}{\Delta},$$

$$C_{mn} = \frac{4}{abB}\ \frac{T_2T_3 - T_1T_4}{\Delta} \tag{5.282}$$

如果扁壳只受 z 方向（法向）的单位集中力，则式（5.1）便变为

$$L_x(u_3^*,\ v_3^*,\ w_3^*) = 0,\qquad L_y(u_3^*,\ v_3^*,\ w_*^3) = 0$$

$$L_z(u_3^*,\ v_3^*,\ w_3^*) = -\delta(P,Q)/B \tag{5.283}$$

对于四边简支扁壳，由上式可得：

$$u_3^*(P,Q)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}A_{mn}\sin\mu_m\xi\sin\mu_n\eta\cos\mu_m x\sin\mu_n y$$

$$v_3^*(P,Q)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}B_{mn}\sin\mu_m\xi\sin\mu_n\eta\sin\mu_m x\cos\mu_n y$$

$$w_3^*(P,Q)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}C_{mn}\sin\mu_m\xi\sin\mu_n\eta\sin\mu_m x\sin\mu_m y$$

（5.284）

式中
$$A_{mn}=\frac{4}{abB}\ \frac{T_2T_4-T_3T_5}{\Delta},$$

$$B_{mn}=\frac{4}{abB}\ \frac{T_2T_3-T_1T_4}{\Delta},$$

$$C_{mn}=\frac{4}{abB}\ \frac{T_1T_5-T_2T_2}{\Delta}\tag{5.285}$$

式（5.277）、式（5.281）及式（5.284）都满足四边简支扁壳的边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&v_i^*=w_i^*=N_{xi}^*=M_{xi}^*=0,\quad on\ x=0,\ a\\&u_i^*=w_i^*=N_{yi}^*=M_{yi}^*=0,\quad on\ y=0,\ b\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,3$$

（5.286）

上述介绍了扁壳的几种基本解，但寻找扁壳的一个理想的基本解仍然值得研究。

§5.8 计算例题

【例5.1】 图5.16是一个四边简支的薄板，受均布荷载，利用样条边界元法求它的挠度及内力。

本例是一个对称问题，可取四分之一板进行计算。因此，只

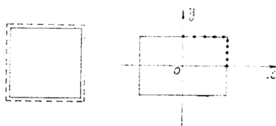


图5.16

表5.1　　　四边简支方板　　　$\mu=0.3$

—	样条边界元法						解析法
	边界节点				角点	板中心	
	0	1	2	3			
$D\theta/qa^3$	-0.01347	-0.01255	-0.00983	-0.00550			
V_n/qa	-0.4205	-0.4050	-0.3542	-0.25230			
R/qa^2					0.06454		0.064964
Dw/qa^4						0.00406	
M_x/qa^2						0.04787	

需在第一象限对板边进行离散（图5.16），采用三次样条边界元法，计算结果见表5.1。这个结果与解析法的结果相差很小。

【例5.2】 图5.17是一个四角点支承的方形薄板，受均布荷载的作用，利用样条边界元法求它的挠度及内力。

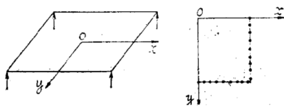


图5.17

本例是一个对称问题，只需在第一象限对板边界离散（图5.17）。采用三次样条边界元法，计算结果见表5.2。这个结果与解析法的结果相差很小。

表5.2　　　　四角点支承方板　　　　$\mu=0.3$

计算方法	边界节点			板中心	
	DW/qa^4			DW/qa^4	M_x/qa^2
	0	2	4		
样条边界法	0.01775	0.01552	0.009175	0.02542	0.1121
解析法	0.01774	0.01549	0.009126	0.02529	0.1119

【例5.3】　图5.18是一个四边固定中间开圆孔的薄板，且在 A、B、C、D 处受集中力 P，利用样条边界元法求它的挠度。$r=0.1725a$，$\xi=0.1825a$

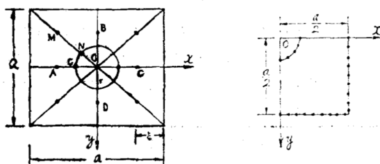


图5.18

本例是一个对称问题，可以按图5.18离散，采用三次样条边界元法，计算结果见表5.3。图中 r 是圆孔的半径。

【例5.4】　图5—19是一个圆板，周边固定且受均布荷载作用，利用样条边界元法求它的位移及内力。

由于轴对称，只在第一象限对板边进行离散，采用三次样条边界元法，计算结果见表5.4及表5.5。这些结果与解析法的结果相差很小。

表53　　四边固定中间开孔方板

点号	Dw/Pa³	
	样条边界元法	有限元法
A	0.00407	0.00406
E	0.00114	0.00110
F	0.00694	0.00708
G	0.00746	0.00727

表5.4　　周边固定圆板的位移　　$\mu=0.3$

x/a	$64Dw/qa^4$				$16D\psi_n/qa^3$			
	h/a=0.02		h/a=0.002		h/a=0.02		h/a=0.002	
	SBEM	AM	SBEM	AM	SBEM	AM	SBEM	AM
0	1.179	1.183	0.9952	1.000	0	0	0	0
0.25	1.054	1.050	0.8764	0.8789	0.2339	0.2343	0.2335	0.2343
0.5	0.700	0.6996	0.5601	0.5625	0.3734	0.3750	0.3745	0.3759
0.75	0.2705	0.2714	0.1897	0.1914	0.3284	0.3281	0.3270	0.3280
1.00	0	0	0	0	0	0	0	0

表中 SBEM—样条边界元法，AM—解析法

表5.5　周边固定圆板的内力　（$q=1,\mu=0.3,E=500$）

厚跨比 h/a		0.002	0.02	0.2	0.6	1.0
V_n	*SBEM*	0.4986	0.4974	0.4989	0.4964	0.4987
	AM	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
M_n	*SBEM*	0.1249	0.1248	0.1230	0.1084	0.0820
	AM	0.1250	0.1250	0.1234	0.1096	0.08214

【例5.5】 图5.20是一个马鞍形扁壳，周边固定，受均布荷载作用，$a=b=20$m，曲率半径 $R=86$m，壳厚 $d=0.2$m，利用样条边界元法求它的位移及内力。

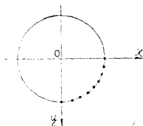


图5.19

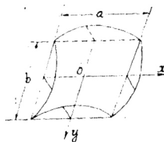


图5.20

本例是一个对称问题，只在第一象限对壳边进行离散(图5.20)，采用三次样条边界元法，计算结果见图5.21。由图可知，这个结果与解析法所得的结果是一致的。

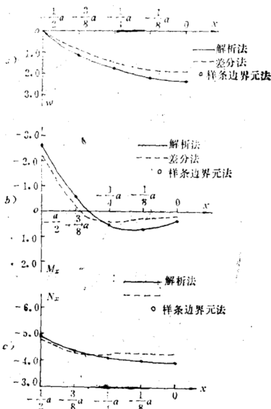


图5.21

【例5.6】 球壳有一个圆孔，孔边有均布拉力q_1及均布剪力q_2作用，图5.22是该球壳开孔附近的部分，已知圆孔半径$a=10$cm，球壳的厚度 $d=0.4$cm，曲率 $k=0.005/$cm，$\mu=0, q_1=100$kg/cm，

$q_2=5\text{kg}/\text{cm}$，$E=7.2\times10^5\text{kg}/\text{cm}^2$，利用样条边界元法求解孔洞引起的附加内力。

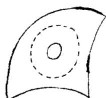


图5.22

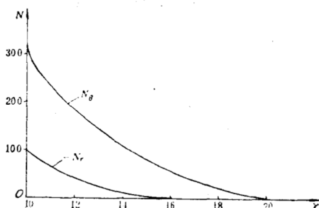


图5.23

本例是一个求解扁壳孔边集中问题，只在孔边离散，整个孔边分划16等分，采用三次样条边界元法，计算结果见图5.23。N_r为径向内力，N_θ为环向内力，最大环向内力为 $\max N_\theta=314\text{kg/cm}$，文献[16]用解析法所得结果为$\max N_\theta=311\text{kg/cm}$，两者误差不到 1%。

§5.9 附录（重要资料）

（一）薄板问题的极坐标公式

在图5.24所示局部坐标系下，薄板边界上的法向转角θ、弯矩M_n、扭矩M_{nt}及折算剪力V_n可以写成下列形式：

$$\theta=\frac{\partial w}{\partial n}=\cos\beta\frac{\partial w}{\partial r}+\sin\beta\frac{\partial w}{r\partial\varphi} \tag{5.287}$$

$$M_n=-\frac{D}{2}\Big[(1+\mu)\nabla^2 w-(1-\mu)(\nabla_1^2\cos2\beta$$

$$-2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)\sin 2\beta)\Big] \tag{5.288}$$

$$M_{nt}=-\frac{1}{2}(1-\mu)D\Big[\nabla_1^2\sin 2\beta$$

$$+2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)\cos 2\beta\Big] \tag{5.289}$$

$$V_n=-D\frac{\partial}{\partial n}(\nabla^2 w)-\Big[\sin\beta\frac{\partial}{\partial r}-\cos\beta\frac{\partial}{r\partial\varphi}$$

$$+\left(\frac{\cos\beta}{r}-\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\Big]M_{nt} \tag{5.290}$$

式中 $$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial n^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial n}+\frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

$$\nabla_1^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{r\partial\varphi^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}=\cos\beta\frac{\partial}{\partial r}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial r} \tag{5.291}$$

其中 ρ 为边界 Γ 的曲率半径，s 为边界弧线，n 及 t 分别代表边界曲线的外法向及切向，其余记号见图5.24。上述所有公式中的导数都是对 Q点求导数的。对 ρ 规定凸边为正。$r=PQ$。

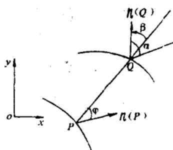


图5.24

（二）薄板的基本解

如果薄板的基本解采用下列形式：

$$w_1^*(P,Q)=\frac{1}{8\pi D}r^2\ln r \tag{5.292}$$

则利用式（5.287）至式（5.290）可得：

$$\theta_1^*(P,Q)=\frac{\partial w_1^*}{\partial n(Q)}=\frac{1}{8\pi D}(2\ln r+1)r\cos\beta$$

$$M_{n1}^*(P,Q)=-\frac{1}{8\pi}\Big[(1-\mu)\cos 2\beta$$

$$+2(1+\mu)(\ln r+1)\Big]$$

$$M_{ns1}^*(P,Q)=\frac{1-\mu}{8\pi}\sin 2\beta$$

$$V_{n1}^*(P,Q)=-\frac{\cos\beta}{4\pi r}[2+(1-\mu)\cos 2\beta]$$

$$+\frac{1-\mu}{4\pi\rho}\cos 2\beta \qquad (5.293)$$

如果将式（5.292）及式（5.293）在P点对n求导数，可得：

$$w_2^*=\frac{\partial w_1^*}{\partial n(P)}=\frac{1}{8\pi D}(2\ln r+1)r\cos\varphi$$

$$\theta_2^*=\frac{1}{8\pi D}[(2\ln r+1)\cos\alpha+2\cos\varphi\cos\beta]$$

$$M_{n2}^*=\frac{1}{4\pi r}[(1-\mu)\sin\varphi\sin 2\beta-(1+\mu)\cos\varphi]$$

$$M_{ns2}^*=\frac{(1-\mu)}{4\pi r}\sin\varphi\cos 2\beta$$

$$V_{n2}^*=\frac{1}{4\pi r}\Big[\frac{1}{r}\cos(\beta-\varphi)(2+(1-\mu)\cos 2\beta)$$

$$+2(1-\mu)\Big(\frac{1}{r}\cos\beta-\frac{1}{\rho}\Big)\sin\varphi\sin 2\beta\Big]$$

$$(5.294)$$

如果将式（5.292）及式（5.293）在P点对t求导数，可

得：

$$w_3^* = \frac{\partial w_1^*}{\partial t(P)} = \frac{1}{8\pi D}(2\ln r + 1)r\sin\varphi$$

$$\theta_3^* = \frac{1}{8\pi D}\left[(2\ln r + 1)\sin\alpha + 2\sin\varphi\cos\beta\right]$$

$$M_{n3}^* = -\frac{1}{4\pi r}\left[(1-\mu)\cos\varphi\sin 2\beta + (1+\mu)\sin\varphi\right]$$

$$M_{ns3}^* = -\frac{1}{4\pi r}(1-\mu)\cos\varphi\cos 2\beta$$

$$V_{n3}^* = -\frac{1}{4\pi r}\left[\frac{1}{r}\sin(\beta-\varphi)(2+(1-\mu)\cos 2\beta)\right.$$

$$\left.+2(1-\mu)\left(\frac{1}{r}\cos\beta - \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi\sin 2\beta\right] \tag{5.295}$$

（三）核函数的表达式

如果设 $w^* = w_1^*$，则有

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2(P)} = \frac{1}{8\pi D}[2(\ln r + 1) + \cos 2\varphi]$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2(P)} = \frac{1}{8\pi D}[2(\ln r + 1) - \cos 2\varphi]$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x(P)\partial y(P)} = \frac{1}{8\pi D}\sin 2\varphi$$

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2(P)} = \frac{1}{4\pi Dr}(\cos\beta - \sin\beta\sin 2\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_*}{\partial y^2(P)} = \frac{1}{4\pi Dr}(\cos\beta + \sin\beta\sin 2\varphi)$$

$$\frac{\partial^2\theta^*}{\partial x(P)\partial y(P)} = -\frac{1}{4\pi Dr}\sin\beta\cos 2\varphi$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x^2(P)} = \frac{1}{4\pi r^2}[(1+\mu)\cos 2\varphi$$

$$-(1-\mu)(\cos 2(\beta-\varphi)-\cos 2\beta)]$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial y^2(P)} = -\frac{1}{4\pi r^2}[(1+\mu)\cos 2\varphi$$

$$-(1-\mu)(\cos 2(\beta-\varphi)+\cos 2\beta)]$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x(P)\partial y(P)} = \frac{1}{4\pi r^2}[(1+\mu)\sin 2\varphi$$

$$+(1-\mu)\sin 2(\beta-\varphi)]$$

$$\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x^2(P)} = -\frac{1}{4\pi r^3}[(5-\mu)\cos(\beta-2\varphi)$$

$$+(1-\mu)(3\cos(3\beta-2\varphi)-2\cos 3\beta]$$

$$-\frac{(1-\mu)}{2\pi\rho r^2}[\cos 2\beta-\cos 2(\beta-\varphi)]$$

$$\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial y^2(P)} = \frac{1}{4\pi r^3}[(5-\mu)\cos(\beta-2\varphi)$$

$$+(1-\mu)(2\cos 3\beta+3\cos(3\beta-2\varphi)$$

$$-\frac{(1-\mu)}{2\pi\rho r^2}[\cos 2\beta+\cos 2(\beta-\varphi)]$$

$$\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x(P)\partial y(P)} = \frac{1}{4\pi r^3}[(5-\mu)\sin(\beta-2\varphi)$$

$$+3(1-\mu)\sin(2\beta-2\varphi)]$$

$$-\frac{(1-\mu)}{2\pi\rho r^2}\sin 2(\beta-\varphi)$$

$$\frac{\partial^2[T]}{\partial x^2(P)} = -\frac{1-\mu}{4\pi r^2}[\sin 2\beta-\sin 2(\beta-\varphi)]$$

$$\frac{\partial^2[T]}{\partial y^2(P)} = -\frac{1-\mu}{4\pi r^2}[\sin 2\beta + \sin 2(\beta-\varphi)]$$

$$\frac{\partial^2[T]}{\partial x(P)\partial y(P)} = \frac{1-\mu}{4\pi r^2}[\cos 2(\beta-\varphi)] \qquad (5.296)$$

式中 $$[T] = M^*_{ns}(S^+_i) - M^*_{ns}(S^-_i) \qquad (5.297)$$

（四）利用高斯求积公式求边界积分

边界积分方程中的一般项可以写成下列形式：

$$\int_\Gamma F^*(P_0,s)\,F(s)\,d\Gamma = \sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m} F^*(P_0,s)\,F_m(s)\,d\Gamma \qquad (5.298)$$

如果设

$$F_m(s) = [\varphi_{3k}(\xi)][Q]_m\{F\}_m \qquad (5.299)$$

则式（5.298）可变为

$$\int_\Gamma F^*(P_0,s)F(s)d\Gamma = \sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m} F^*(P_0,s)F_m(s)|A|d\xi \qquad (5.300)$$

式中 $\xi = s/h$

$$|A| = \left[\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.301)$$

将式（5.299）代入式（5.300）便得：

$$\int_\Gamma F^*(P_0,s)\,F(s)\,d\Gamma = \sum_{m=1}^{M}[G]_m[Q]_m\{F\}_m \qquad (5.302)$$

式中 $\{F\}_m = [F_0 \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \cdots \quad F_N]^T_m$

$$[G]_m = \int_{\Gamma_m} F^*(P_0,\xi)[\varphi_{3k}(\xi)]|A|d\xi \qquad (5.303)$$

式（5.303）可以利用一维高斯求积公式进行计算。

（五）Reissner 板的基本解

$$w_1^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r - \frac{1}{2C\pi} \ln r$$

$$\psi_{n1}^* = \frac{1}{8\pi D} r(2\ln r + 1)\cos\beta$$

$$\psi_{t1}^* = \frac{1}{8\pi D} r(2\ln r + 1)\sin\beta$$

$$M_{n1}^* = -\frac{1}{8\pi}[(1+3\mu) + 2(1+\mu)\ln r + 2(1-\mu)\cos^2\beta]$$

$$M_{nt1}^* = \frac{1-\mu}{8\pi}\sin 2\beta$$

$$Q_{n1}^* = -\frac{1}{2\pi r}\cos\beta \tag{5.304}$$

如果将式（5.304）在P点对n求导数，则有

$$w_4^* = \frac{r}{8\pi D}(2\ln r + 1)\cos\varphi + \frac{1}{2\pi C r}\cos\varphi$$

$$\psi_{n4}^* = \frac{1}{8\pi D}[(2\ln r + 1)\cos\alpha + 2\cos\varphi\cos\beta]$$

$$\psi_{t4}^* = \frac{1}{8\pi D}[(2\ln r + 1)\sin\alpha + 2\sin\varphi\sin\beta]$$

$$M_{n4}^* = \frac{1}{4\pi r}[(1-\mu)\sin\varphi\sin 2\beta - (1+\mu)\cos\varphi]$$

$$M_{nt4}^* = \frac{1-\mu}{4\pi r}\sin\varphi\cos 2\beta$$

$$Q_{n4}^* = \frac{1}{\pi r^2}\cos\varphi\cos\beta \tag{5.305}$$

$w_2^* = 0$，　　$G = 1/8\pi D$，　　$H = \lambda/16\pi$

$$\psi^*_{n2}=G[A(z)\cos\varphi\cos\beta+B(z)\cos\gamma]$$

$$\psi^*_{t2}=G[A(z)\cos\varphi\sin\beta-B(z)\sin\gamma]$$

$$M^*_{n2}=H\lambda\{C(z)\cos\varphi(\cos^2\beta+\mu\sin^2\beta)$$
$$+A(z)[\sin\beta\sin(2\varphi-\gamma)+\mu\cos\beta(2\varphi-\gamma)]/z$$
$$+D(z)(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)\}$$

$$M^*_{nt2}=H(1-\mu)[C(z)\cos\varphi\sin\beta$$
$$-A(z)\sin(3\varphi-2\gamma)/z+D(z)\sin(\varphi-2\gamma)]$$

$$Q^*_{n2}=8H\lambda[E(z)\cos\varphi\cos\beta-F(z)\cos\gamma] \quad (5.306)$$

式中 $A(z)=2+8E(z)/(1-\mu), B(z)=-8F(z)/(1-\mu)$,
$C(z)=dA(z)/dz,\ D(z)=dB(z)/dz$,
$E(z)=k_0+2(k_1-1/z)/z,\ F(z)=k_0+(k_1-1/z)/z$
$z=\lambda r$，k_0及k_1分别为零阶及一阶修正的贝赛尔函数。

参 考 文 献

[1] 秦荣，样条边界元法，广西力学学会，1980年；广西大学学报，2（1983）。

[2] Qin Rong(秦荣), Funpamentals and Applications of Spline Boundary Element Method, 第五届国际边界元法会议论文集，1983年，日本广岛。

[3] Qin Rong(秦荣), Spline Boundary Element Me-thod for Shallow shells, 第六届国际边界元法会议论

文集，1984年，英国。

[4] Qin Rong(秦荣), SPline Boundary Element Method for Vibration and Stability of Thin Shell. 第七届国际边界元法会议论文，1985年，意大利。

[5] Qing (秦荣), Spline Boundary Element Method for Vibration of Shallow Shells, 保加利亚全国第五次理论与应用力学会议文集，1985年，保加利亚。

[6] 秦荣，板壳振动的样条边界元法，全国第一届工程中的边界元法会议论文集，1985年。

[7] 秦荣，域外奇点的样条边界元法，广西大学，1984年。

[8] 卢西林，杜庆华，解板弯曲问题的边界积分方程——边界元外算法，同[6]。

[9] C. A. Brebbia, J. C. F. Tellees and L. C. Wrobel, Boundary Element Techniques, 1984。

[10] 胡海昌，弹性力学的变分原理及其应用，科学出版社，1980年。

[11] 秦荣，Reissner 型板的样条边界元法，广西力学学会，1983年。

[12] 唐锦春等，域外奇点边界积分直接法解板的弯曲问题，同[6]。

[13] 何广乾等，任意二次型双曲面扁薄壳的基本解，《上海力学》，3（1984）。

[14] 秦荣，开孔板壳的样条边界元法，广西大学，1985年。

[15] 彭晓林，壳体孔洞应力集中问题的边界元法，同[6]。

[16] Г. Н. Савин，具有任意孔洞壳体的应力分布，《壳体结构文汇》第五册，中国工业出版社，1966。

第六章　热弹性问题的样条边界元法

物体由于温度变化会产生变形。如果物体由于温度变化引起的变形受到约束时，即使没有外力作用，在物体内也会产生应力。这种应力称为热应力。

热应力现象普遍发生在工业建设和国防建设（例如，航空航天，机械制造，冶金工程，土木工程，水电工程……）中，许多工程设计需要考虑热应力问题，例如，核电站，火箭、超音速飞机、大型水坝及大跨度桥梁的设计，都需要考虑热应力。随着我国四个现代化的发展，热应力问题的分析越来越显得重要。因此，热应力问题是一个非常重要的研究课题。

本章主要介绍弹性体热应力问题的样条边界元法，而且以均质各向同性的线性热弹性体作为研究对象。

§6.1　热弹性问题的样条边界元法

（一）基本方程积

图6.1是一个热弹性体，它的应力与应变的关系为

$$\sigma_{ij}=D_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}-\Theta T\delta_{ij} \tag{6.1}$$

式中

$$D_{ijkl}=A\delta_{ij}\delta_{kl}+G(\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jl}) \tag{6.2}$$

$$\Theta=\frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha G,\qquad A=\frac{2\mu}{1-2\mu}G \tag{6.3}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

式中 T 为弹性体的温度变化，α 为线膨胀系数，μ 为泊松系数，G 为剪切弹性模量。

因为
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{6.4}$$
因此，如果弹性体是各向同性的，则式（6.1）便变为
$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij}u_{k,k} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) - \Theta T\delta_{ij} \tag{6.5}$$
如果将式（6.1）或式（6.5）代入第四章式（4.1），则平衡方程可以写成下列形式：
$$D_{ijkl}u_{k,lj} - \Theta T_{,j}\delta_{ij} + b_i = 0 \tag{6.6}$$
或
$$(A+G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} - \Theta T_{,j}\delta_{ij} + b_i = 0 \tag{6.7}$$
这时边界条件为
$$\left.\begin{aligned} u_i &= \overline{u}_i && \text{on } \Gamma_u \\ p_i &= \sigma_{ij}n_j = \overline{p}_i && \text{on } \Gamma_p \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$
本节的记号与第四章相同。

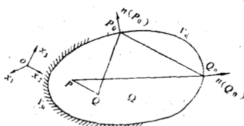


图6.1

（二）边界积分方程

如果在式（6.7）两边乘上基本解 u_{kl}^*，则有
$$\int_\Omega [(A+G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} - \Theta T_{,j}\delta_{ij} + b_i]u_{ki}^*\, d\Omega = 0 \tag{6.9}$$
式中Ω为弹性体的区域。

利用分部积分法，式（6.9）可以变为下列积分方程：
$$u_k(P) = \int_\Gamma [u_{kl}^*(P,Q_0)p_l(Q_0) - p_{kl}^*(P,Q_0)u_l(Q_0)]\, d\Gamma(Q_0)$$

$$+\int_{\Omega} u^*_{kl}(P,Q)b_l(Q)d\Omega(Q)$$

$$+\int_{\Omega} u^*_{kl,l}(P,Q)\Theta T(Q)d\Omega(Q) \qquad (6.10)$$

式中 u^*_{kl} 及 p^*_{kl} 为基本解，与第四章相同，见§4.2。

当 $P\longrightarrow P_0$ 时，则式（6.10）便变为下列边界积分方程：

$$C_{kl}(P_0)\,u_l(P_0)+\int[p^*_{kl}(P_0,Q_0)\,u_l(Q_0)$$

$$-u^*_{kl}(P_0,Q_0)p_l(Q_0)\,]\,d\Gamma(Q_0)$$

$$=\int_{\Omega} u^*_{kl}(P_0,Q)b_l(Q)\,d\Omega(Q)$$

$$+\int_{\Omega} u^*_{kl,l}(P_0,Q)\Theta T(Q)d\Omega(Q) \qquad (6.11)$$

式中 C_{kl} 为奇性系数，见第四章。式（6.10）及式（6.11）中的区域积分可以化为边界积分。

（三）域内应力

如果将式（6.10）代入式（6.5）便得：

$$\sigma_{ij}(P)=\int_{\Gamma}[\,D_{kij}(P,Q_0)\,p_k(Q_0)$$

$$-S_{kij}(P,Q_0)u_k(Q_0)\,]\,d\Gamma(Q_0)$$

$$+\int_{\Gamma} D_{kij}(P,Q_0)n_k(Q_0)\Theta T(Q_0)d\Gamma(Q_0)$$

$$+\int_{\Omega} D_{kij}(P,Q)\,[\,b_k(Q)-\Theta T_{,k}(Q)\,]\,d\Omega(Q)$$

$$-\Theta T(P)\delta_{ij} \qquad (6.12)$$

这就是域内应力的计算公式。利用式（6.11）求出边界未知量后，即可利用式（6.12）确定域内任一点的应力。式中 D_{kij} 及 S_{kij} 分别由式（4.47）及式（4.48）确定，见第四章。

（四）二维样条边界元法

本节以平面问题为例，所有记号与第四章相同。如果将整个边界分为M个部分，则式（6.11）可变为

$$C_{kl}(P_0)u_l(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,s)+f_k(P_0) \tag{6.13}$$

式中　$k,\ l=1,\ 2$

$$\Pi_{km}(P_0,s)=\int_{\Gamma_m}[\ u_{kl}^{*}(P_0,s)p_l(P,s)-P_{kl}^{*}(P_0,s)u_l(s)\ ]\,d\Gamma(s) \tag{6.14}$$

$$f_k(P_0)=\int_{\Omega}[\ u_{kl}^{*}(P_0,Q)b_l(Q)++u_{kl,l}^{*}(P_0,Q)\,\Theta T(Q)\ ]\,d\Omega(Q) \tag{6.15}$$

式中 s 为边界 Γ 的弧坐标。

式（6.15）可以按下列两种方法处理：（1）先将式（6.15）化为边界积分，然后沿边界离散，见第四章及本章§6.4；(2)先将区域Ω分为有限个单元，即

$$f_k(P_0)=\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega e}[u_{kl}^{*}(P_0,Q)b_l(Q)-u_{kl,l}^{*}(P_0,Q)\,\Theta T(Q]\,d\Omega \tag{6.16}$$

然后利用高斯求积公式进行计算。

1．第一种方法

如果将边界每个区域分为 N_m 个等分，则式（6.14）可变为

$$\Pi_{km}(P_0,s_i)=\sum_{i=0}^{2}\lambda_i[\ u_{kl}^{*}(P_0,s_i)p_l(s_i)-p_{kl}^{*}(P_0,s_i)u_l(s_i)\ ]\,h_m \tag{6.17}$$

式中 λ_i 是与数值积分法求积公有关的系数，见第一章；$z=N_m$。P_0在边界上，设 $P_0=$ $=s_j$ ($j=0,1,2,\cdots,N$)

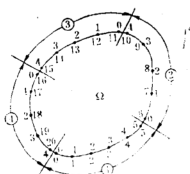


图6.2

将式(6.17)代入式(6.13)可得：

$$R_k(P_0)=C_{kl}(P_0)u_l(P_0)$$

$$-\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,s_i)-f_k(P_0) \qquad (6.18)$$

式中 $R_k(P_0)$是边界 P_0点的残数，k, $l=1$, 2。由式(6.18)可得：

$$\{R\}=\sum_{m=1}^{M}([H]_{1m}\{u\}_{1m}+[H]_{2m}\{u\}_{2m}$$

$$-[K]_{1m}\{p\}_{1m}-[K]_{2m}\{p\}_{2m})-\{f\} \qquad (6.19)$$

式中 $\quad \{f\}=[\{f\}_1^T \quad \{f\}_2^T]^T \qquad (6.20)$

$$\{f\}_k=[f_k(s_0) \quad f_k(s_1) \quad \cdots \quad f_k(s_N)]^T \qquad (6.21)$$

利用配点法可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([H]_{1m}\{u\}_{1m}+[H]_{2m}\{u\}_{2m}-[K]_{1m}\{p\}_{1m}$$

$$-[K]_{2m}\{p\}_{2m})=\{f\} \qquad (6.22)$$

式中 $[H]_{km}$, $[K]_{km}$, $\{u\}_{km}$ 及$\{p\}_{km}$ 与第四章相同，见式(4.86)～式(4.96)。利用式(6.22)可求出边界未知量，但注意引入边界条件。

2. **第五种方法**

如果用三次 B 样条函数来逼近边界未知量，则

$$u_{km}(s)=[\phi(s)]\{a\}_{km},$$
$$p_{km}(s)=[\phi(s)]\{b\}_{km} \tag{6.23}$$

由此可得：

$$\{u\}_{km}=[N]_m\{a\}_{km},$$
$$\{p\}_{km}=[N]_m\{p\}_{km} \tag{6.24}$$

式中 $$[N]_m=[B]_m[Q]_m \tag{6.25}$$

将式（6.23）代入式（5.13）可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([H]_{1m}\{a\}_{1m}+[H]_{2m}\{a\}_{2m}$$
$$=\sum_{m=1}^{M}([K]_{1m}\{b\}_{1m}+[K]_{2m}\{b\}_{2m})+\{f\} \tag{6.26}$$

式中 $\{a\}_{km}=[u_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{z-1} \quad u_z]^T$

$\{b\}_{km}=[p_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{z-1} \quad p_z]^T$

式中 $[H]_{km}$ 及 $[K]_{km}$ 由第四章式（4.116）确定。利用式（6.26）求出 $\{a\}_{km}$ 及 $\{b\}_{km}$ 后，即可利用式（6.24）求出边界未知量。

3．第三种方法

如果将边界 Γ_m 分为 N_m等分，则

$$u_l(s)=\sum_{i=0}^{z}u_{li}\phi_i(s),\quad p_l(s)=\sum_{i=0}^{z}p_{li}\phi_i(s) \tag{6.27}$$

式中 $z=N_m$。将式（6.27）代入式（6.13）可得

$$\sum_{m=1}^{M}([H]_{1m}\{u\}_{1m}+[H]_{2m}\{u\}_{2m}$$
$$=\sum_{m=1}^{M}([K]_{1m}\{p\}_{1m}+[K]_{2m}\{p\}_{2m})+\{f\} \tag{6.28}$$

式中 $[H]_{km}$ 及 $[K]_{km}$ 由第四章式（4.136）确定。

由式（6.28）可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{p\}+\{f\} \tag{6.29}$$

式中 $[H]=[[H]_1 \quad [H]_2]$

$$[K]=[[K]_1 \quad [K]_2] \tag{6.30}$$

$$\{u\}=[\{u\}_1^T \quad \{u\}_2^T]^T,\ \{p\}=[\{p\}_1^T \quad \{p\}_2^T]^T \tag{6.31}$$

$$\left.\begin{aligned}[H]_k&=[[H]_{k1} \quad [H]_{k2} \quad \cdots \quad [H]_{kM}]\\ [K]_k&=[[K]_{k1} \quad [K]_{k2} \quad \cdots \quad \{K\}_{kM}]\end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

$$\left.\begin{aligned}\{u\}_k&=[\{u\}_{k1}^T \quad \{u\}_{k2}^T \quad \cdots \quad \{u\}_{kM}^T]^T\\ \{p\}_k&=[\{p\}_{k1}^T \quad \{p\}_{k2}^T \quad \cdots \quad \{p\}_{kM}^T]^T\end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

式（6.28）与边界条件有关，引入边界条件后可变为

$$[A]\{X\}=\{F\} \tag{6.34}$$

或
$$[G]\{X\}=\{P\} \tag{6.35}$$

式中 $[G]=[A]^T[A]$，$\{P\}=[A]^T\{F\}$

利用式（6.34）或式（6.35）可求出 $\{u\}_{km}$ 及 $\{p\}_{km}$。当边界未知量确定后，利用式（6.10）及式（6.12）的离散化格式即可求出区域内任一点的位移及应力值。

（五）边界上任一点的应力

边界上任一点的应力可以按下列公式确定：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n&=p_1\cos\theta+p_2\sin\theta\\ \sigma_{ns}&=-p_1\sin\theta+p_2\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

$$\sigma_s=\frac{1}{1-\mu}\left[2G\left(-\sin\theta\frac{du_1}{ds}+\cos\theta\frac{du_2}{ds}\right)+\mu\sigma_n-(1-2\mu)\delta T\right] \tag{6.37}$$

式中 n 及 s 是边界的法线及切线，θ 为法线与 x_1 轴所成的角

度。式（6.36）及式（6.37）为平面应变问题的边界应力公式。对于平面应力问题只要将式中的 μ 用 μ' 代替及 α 用 α' 代替就可以了。这时

$$\mu' = \mu/(1+\mu), \qquad \alpha' = \alpha/(1+\mu)$$

§6.2 热薄板问题的样条边界元法

（一）基本方程

热弹性薄板小挠度问题的基本微分方程为

$$D\nabla^4 w = q + \nabla^2 M_T \tag{6.38}$$

弯曲内力与挠度有下列关系：

$$M_{ij} = -B_{ijkl} w_{,kl} + M_T \delta_{ij} \tag{6.39}$$

$$Q_i = -B_{ijkl} w_{,klj} + M_{T,i} \tag{6.40}$$

$$V_i = -D[w_{,iii} - (2-\mu)(w_{,ikk} - w_{,iii})] + M_{T,i} \tag{6.41}$$

式中 $$B_{ijkl} = D[\mu\delta_{ij}\delta_{kl} + (1-\mu)\delta_{ik}\delta_{jl}] \tag{6.42}$$

$$M_T = \Theta\int_{-/2}^{/2} \tau(x_1, x_2, z)\, z dz \tag{6.43}$$

式中 τ 为温度变化，d 为板厚度，$\Theta = E\alpha/(1-\mu)$。

在边界上的弯矩及扭矩为

$$M_n = M_{ij} n_i n_j, \qquad M_{nt} = M_{ij} n_i t_j \tag{6.44}$$

式中 $$n_i = \cos(n, x_i), \qquad t_j = \cos(t, x_j) \tag{6.45}$$

在边界上的剪力及等效剪力为

$$\left.\begin{aligned} &Q_n = Q_i n_i, \qquad V_n = V_i n_i \\ &V_n = Q_n + M_{nt,t} \end{aligned}\right\} \tag{6.46}$$

边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll} w = \bar{w}, & w_{,n} = \bar{w}_{,n} \\ V_n = \bar{V}_n, & M_n = \bar{M}_n \end{array}\right\} \tag{6.47}$$

（二）边界积分方程

式（6.38）及其边界条件可化为下列边界积分方程：

$$\begin{aligned} C(P)\,w_k(P) = & \int_\Gamma [w_k^*(P,Q_0)\,V_n(Q_0) \\ & - \theta_k^*(P,Q_0)\,M_n(Q_0) - V_{nk}^*(P,Q_0)w(Q_0) \\ & + M_{nk}^*(P,Q_0)\theta(Q_0)]d\Gamma(Q_0) \\ & + \int_\Omega [q(Q)\,w_k^*(P,Q) \\ & + M_T(Q)\nabla^2 w_k^*(P,Q)]d\Omega \end{aligned} \tag{6.48}$$

式中　$k = 1,\ 2,\quad w_1 = w,\quad w_2 = \theta$

$$w_1^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \tag{6.49}$$

其余记号与第五章相同。

由式（6.48）可得：

$$\begin{aligned} w_{,i}(P) = & \int_\Gamma [w_{1,i}^*(P,Q_0)V_n(Q_0) - \theta_{1,i}^*(P,Q_0)M_n(Q_0) \\ & - V_{n1,i}^*(P,Q_0)\,w(Q_0) \\ & + M_{n1,i}^*(P,Q_0)\theta(Q_0)]\,d\Gamma(Q_0) + T_{1,i} \\ & + \int_\Omega [w_{1,i}^*(P,Q)q(Q) \\ & + M_T(Q)\nabla^2 w_{1,i}^*(P,Q)]d\Omega(Q) \end{aligned} \tag{6.50}$$

式中
$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 w_1^* &= (\ln r+1)/2\pi D\\ \nabla^2 w_2^* &= (\nabla^2 w_1^*)_{,n} = \cos\beta/2\pi D r\end{aligned}\right\} \quad (6.51)$$

$$\nabla^2 w_{1,i} = (\nabla^2 w_1^*)_{,i} = r_{,i}/2\pi D r \quad (6.52)$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(P)} = -\frac{r_i}{r},\quad r_i = x_i(Q) - x_i(P) \quad (6.53)$$

因为
$$\frac{\partial}{\partial x_j(P)}\int_\Omega M_T(Q)\,\nabla^2 w_{1,i}^*(P,Q)\,d\Omega$$
$$=\int_\Omega M_T(Q)\,\nabla^2 w_{1,ij}^*(P,Q)\,d\Omega + \frac{1}{2}M_T(P)\delta_{ij} \quad (6.54)$$

因此由式（6.50）可得：

$$\begin{aligned}w_{,ij}(P) = &\int_\Gamma [w_{1,ij}^*(P,Q_0)V_n(Q_0)\\ &- \theta_{1,ij}^*(P,Q_0)M_n(Q_0) - V_{n1,ij}^*(P,Q_0)w(Q_0)\\ &+ M_{n1,ij}^*(P,Q_0)\theta(Q_0)]d\Gamma + T_{1,ij}\\ &+\int_\Omega [w_{1,ij}^*(P,Q)q(Q)\\ &+ M_T(Q)\nabla^2 w_{1,ij}^*(P,Q)]d\Omega + \frac{1}{2}M_T(P)\delta_{ij}\end{aligned} \quad (6.55)$$

式中
$$\begin{aligned}\nabla^2 w_{1,ij}^* &= (\nabla^2 w_1^*)_{,ij}\\ &= \frac{1}{2\pi D r^2}\left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right)\end{aligned} \quad (6.56)$$

利用式（6.48）求出边界未知量后，将式（6.55）代入式（6.39）即可求出热弹性薄板问题的弯矩及扭矩。

（三）样条边界元法

如果将薄板整个边界分为M个区域，又将每个边界区域分为N_m个等分，则式（6.48）便变为下列形式：

$$\sum_{m=1}^{M}([\overline{D}]_{km}\{\overline{a}\}_m-[\overline{M}]_{km}\{\overline{b}\}_m-[\overline{H}]_{km}\{\overline{A}\}_m$$

$$+[\overline{K}]_{km}\{\overline{B}\}_m)-[T]_k\{c\}=\{f\}_k\quad k=1,2,3\qquad(6.57)$$

式中 $\overline{a}$，$\overline{b}$，$\overline{A}$ 及 $\overline{B}$ 为任意参数；$\{f\}_k$为

$$\{f\}_k=[f_k(s_0)\quad f_k(s_1)\quad\cdots\quad f_k(s_N)]^T\qquad(6.58)$$

$$f_k(s_j)=\int_\Omega[q(Q)w_k^*(s_j,Q)$$

$$+M_T(Q)\nabla^2w_k^*(s_j,Q)]d\Omega\qquad(6.59)$$

式（6.59）可以化为边界积分。

由上述可知，式（6.57）代表五种方法的计算格式（详见§5.3）：

1．第一种方法

$$\{\overline{a}\}_m=\{w\}_m,\qquad\{\overline{b}\}_m=\{\theta\}_m,$$
$$\{\overline{A}\}_m=\{V\}_m,\qquad\{\overline{B}\}_m=\{M\}_m\qquad(6.60)$$

$$\left.\begin{aligned}&[\overline{D}]_{km}=[D]_{km}\qquad[\overline{M}]_{km}=[M]_{km}\\&[\overline{H}]_{km}=[H]_{km}\qquad[\overline{K}]_{km}=[K]_{km}\end{aligned}\right\}\qquad(6.61)$$

式（6.61）由式（5.63）和式（5.64）确定。

2．第二种方法

$$\left.\begin{aligned}&\{\overline{a}\}_m=\{a\}_m\qquad\{\overline{b}\}_m=\{b\}_m\\&\{\overline{A}\}_m=\{A\}_m\qquad\{\overline{B}\}_m=\{B\}_m\end{aligned}\right\}\qquad(6.62)$$

$$\left.\begin{array}{ll}[\overline{D}]_{km}=[\widetilde{D}]_{km} & [\overline{M}]_{km}=[\widetilde{M}]_{km} \\ [\overline{H}]_{km}=[\widetilde{H}]_{km} & [\overline{K}]_{km}=[\widetilde{K}]_{km}\end{array}\right\} \quad (6.63)$$

式（6.63）由式（5.108）、式（5.111）和式（5.114）确定。

3．第三种方法

$$\{\overline{a}\}_m=\{w\}_m, \cdots \{\overline{B}\}_m=\{M\}_m \quad (6.64)$$

$$[\overline{D}]_{km}=[D]_{km}, \cdots, [\overline{K}]_{km}=[K]_{km} \quad (6.65)$$

式（6.65）由式（5.118）和式（5.119）确定。

4．第四种方法

$$\{\overline{a}\}_m=\{w\}_m, \cdots, \{\overline{B}\}_m=\{M\}_m \quad (6.66)$$

$$[\overline{D}]_{km}=[D]_{km}, \cdots, [\overline{K}]_{km}=[K]_{km} \quad (6.67)$$

式（6.67）由式（5.118）、式（5.119）和式（5.133）确定。

5．第五种方法

$$\{\overline{a}\}_m=\{a\}_m, \cdots, \{\overline{b}\}_m=\{b\} \quad (6.68)$$

$$[\overline{D}]_{km}=[D]_{km}, \cdots, [\overline{K}]_{km}=[K]_{km} \quad (6.69)$$

式（6.69）由式（5.118）、式（5.119）、式（5.133）和式（5.136）确定。

式（6.57）与边界条件及角点条件有关，引入边界条件及角点条件后便变为

$$[A]\ \{X\}=\{f\} \quad (6.70)$$

具体做法详见第五章。

利用式（6.70）可求出$\{a\}_m$，$\{b\}_m$，$\{A\}_m$，$\{B\}_m$或$\{w\}_m$，$\{\theta\}_m$，$\{V\}_m$，$\{M\}_m$。当$\{a\}_m$，…，$\{B\}_m$确定后，利用下式即可确定边界未知量：

$$\begin{array}{ll}\{w\}_m=[N]_m\{a\}_m & \{\theta\}_m=[N]_m\{b\}_m \\ \{V\}_m=[N]_m\{A\}_m & [M]_m=[N]_m\{B\}_m\end{array}$$

式中　$[N]_m=[B]_m[Q]_m$

当边界未知量确定后，即可利用式（6.48）和式（6.55）的离散化格式，求出薄板域内的挠度及内力值。

§6.3　区域积分化为边界积分的方法

在边界元法中，需要计算下列类型的区域积分：

$$B_k=\int_\Omega U_{kl}(P,Q)b_l(Q)d\Omega(Q) \tag{6.71}$$

这个区域积分可以化为边界积分。

区域积分化为边界积分的方法有好几种，本章采用伽辽金张量法将区域积分化边界积分法。设

$$U_{kl}(P,Q)=G_{kl,ii}(P,Q)-\frac{G_{ki,il}(P,Q)}{2(1-\mu)} \tag{6.72}$$

式中 $G_{kl}(P,Q)$为伽辽金张量。对于二维问题：

$$G_{kl}(P,Q)=\frac{1}{8\pi G}r^2\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{kl} \tag{6.73}$$

对于三维问题：

$$G_{kl}(P,Q)=\frac{1}{8\pi G}r\delta_{kl} \tag{6.74}$$

将式（6.74）代入式（6.72）便得：

$$U_{kl}(P,Q)=\frac{1}{16\pi G(1-\mu)}\left[(3-4\mu)\delta_{kl}+\frac{r_kr_l}{r^2}\right]$$

这就是第四章式（4.28）所示的开尔文的基本解。将式（6.73）代入式（6.72）便得：

$$U_{kl}(P,Q)=\frac{1}{8\pi G(1-\mu)}\left[(3-4\mu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{kl}\right.$$
$$\left.+r_kr_l/r^2-\left(\frac{7-8\mu}{2}\right)\delta_{kl}\right]$$

这个结果与第四章式（4.31）所示的基本解相差一个常数项，在以前建立式（4.31）时，我们略去了这个常数项，现在处理体力积分时，必须考虑这个常数项。

将式（6.72）代入式（6.71）便得：

$$B_k(P)=\int_\Omega\left[G_{kl,ii}(P,Q)-\frac{G_{ki,il}(P,Q)}{2(1-\mu)}\right]b_l(Q)d\Omega(Q) \tag{6.75}$$

由高斯定理可知：

$$\int_\Omega A_{kl,i}d\Omega=\int_\Gamma A_{kl}n_i d\Gamma \tag{6.76}$$

利用式（6.76）可将式（6.75）化为边界积分。

（一）将体力积分化为边界积分

如果体力为常数，利用式（6.76），则式（6.75）可变为下列边界积分：

$$B_k(P)=b_l\int_\Gamma\left[G_{kl,i}(P,Q_0)-\frac{G_{ki,l}(P,Q_0)}{2(1-\mu)}\right]n_i(Q_0)d\Gamma(Q_0) \tag{6.77}$$

域内任一点的应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(P)=&\int_\Gamma[D_{kij}(P,Q_0)p_k(Q_0)\\&-S_{kij}(P,Q_0)u_k(Q_0)]d\Gamma(Q_0)\\&+\int_\Gamma\widetilde{S}_{ij}(P,Q_0)d\Gamma(Q_0)\end{aligned} \tag{6.78}$$

1. 二维问题

将式（6.72）代入式（6.77）便得：

$$
\left.\begin{aligned}
B_k(P) &= \frac{1}{8\pi G}\int_\Gamma P_k(P,Q_0)\,d\Gamma(Q_0) \\
P_k(P,Q_0) &= \left(2\ln\left(\frac{1}{r}\right)-1\right)\left[b_k n_m r_m \right.\\
&\qquad \left. -\frac{n_k b_m r_m}{2(1-\mu)}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (6.79)
$$

式中　　$r_m = x_m(Q_0) - x_m(P)$

式（6.78）中的$\widetilde{S}_{ij}(P,Q_0)$由下列公式确定：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_{ij}(P,Q_0) = \frac{1}{2\pi}\Big[&(1+\ln r)\Big\{n_m r_m(b_i r_j + b_j r_i \\
&+ \frac{\mu}{1-\mu} b_l r_l \delta_{ij}) \\
&- \frac{b_m r_m}{2(1-\mu)}(n_i r_j + n_j r_i)\Big\}\frac{1}{r^2} \\
&- \frac{1}{2(1-\mu)}\left(\frac{1}{2}+\ln r\right)\Big\{\mu n_m b_m \delta_{ij} \\
&+ \frac{1-2\mu}{2}(b_i n_j + b_j n_i)\Big\}\Big]
\end{aligned} \qquad (6.80)
$$

2．三维问题

将式（6.74）代入式（6.77）便得：

$$
B_k(P) = \frac{1}{8\pi G}\int_\Gamma \left[n_m r_m b_k - \frac{b_m r_m n_k}{2(1-\mu)}\right]\left(\frac{1}{r}\right)d\Gamma \qquad (6.81)
$$

同时可得：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_{ij}(P,Q_0) = \frac{1}{8\pi r^3}\Big[&n_m r_m(b_i r_j + b_j r_i) \\
&+ \frac{1}{1-\mu}\Big\{\mu\delta_{ij}(n_m r_m b_l r_l - b_m n_m r^2) \\
&- \frac{1}{2}\big[b_m r_m(n_i r_j + n_j r_i) + (1-2\mu)(b_i n_j
\end{aligned}
$$

$$+b_j n_i)r^2]\}]\qquad(6.82)$$

（二） 定常热应力问题

利用边界元法求解定常热应力问题时，需要计算下列区域积分：

$$B_k(P)=\Theta\int_{\Omega}u^*_{kl,l}(P,Q)T(Q)d\Omega(Q)\qquad(6.83)$$

设 $$u^*_{kl,l}(P,Q)=G_{kl,ii l}(P,Q)-\frac{G_{kl,ll l}(P,Q)}{2(1-\mu)}\qquad(6.84)$$

轮换哑下标，则式（6.84）可变为

$$u_{l,l}(P,Q)=\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}G_{kl,lii}(P,Q)\qquad(6.85)$$

将式（6.85）代入式（6.83）便得：

$$B_k(P)=\frac{\alpha G(1+\mu)}{1-\mu}\int_{\Omega}G_{kl,lii}(P,Q)T(Q)d\Omega(Q)\qquad(6.86)$$

对于稳定热传导，因为 $\nabla^2T=0$，因此式（6.86）可变为下列形式：

$$B_k(P)=\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)\alpha G\int_{\Omega}[G_{kl,lii}(P,Q)T(Q)-G_{kl,l}(P,Q)T_{,ii}(Q)]d\Omega\qquad(6.87)$$

又因为

$$G_{kl,lii}(P,Q)T(Q)=[T(Q)G_{kl,li}(P,Q)]_{,i}-G_{kl,li}(P,Q)T_{,i}(Q)\qquad(6.88)$$

$$G_{kl,l}(P,Q)T_{,ii}(Q)=[G_{kl,l}(P,Q)T_{,i}(Q)]_{,i}-G_{kl,li}(P,Q)T_{,i}(Q)\qquad(6.89)$$

因此式（6.87）便变为

$$B_k(P)=\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)\alpha G\int_{\Omega}\{[T(Q)G_{kl,li}(P,Q)]_{,i}-[G_{kl,l}(P,Q)T_{,i}(Q)]_{,i}\}d\Omega\qquad(6.90)$$

式中[·],$_i$ 为[·]在Q点对 x_i 的导数。

利用式（6.76）可将式（6.90）变为下列形式：

$$B_k(P)=\int_\Gamma [P_k(P,Q_0)T(Q_0) - Q_k(P,Q_0)T_{,m}(Q_0)n_m(Q_0)]d\Gamma \tag{6.91}$$

式中 $$P_k(P,Q_0)=\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)\alpha GG_{kl,li}(P,Q_0)n_i(Q_0) \tag{6.92}$$

$$Q_k(P,Q_0)=\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)\alpha GG_{kl,l}(P,Q_0) \tag{6.93}$$

域内任一点的应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(P)=&\int_\Gamma [D_{kij}(P,Q_0)p_k(Q_0) - S_{kij}(P,Q)u_k(Q_0)]d\Gamma(Q_0)\\&+\int_\Gamma \widetilde{D}_{ij}(P,Q_0)T(Q_0)d\Gamma(Q_0)\\&-\int_\Gamma \widetilde{S}_{ij}(P,Q_0)T_{,m}(Q_0)n_m(Q_0)d\Gamma(Q_0)\\&-\Theta_{ij}T(P)\end{aligned} \tag{6.94}$$

1．二维问题

$$\left.\begin{aligned}P_k(P,Q_0)&=-\frac{(1+\mu)\alpha}{4\pi(1-\mu)}\left\{\left(\frac{1}{2}+\ln r\right)n_k + n_m r_m r_k/r^2\right\}\\Q_k(P,Q_0)&=-\frac{(1+\mu)\alpha}{4\pi(1-\mu)}\left(\frac{1}{2}+\ln r\right)r_k\end{aligned}\right\} \tag{6.95}$$

$$\widetilde{S}_{ij}(P,Q_0)=\frac{\alpha G(1+\mu)}{2\pi(1-\pi)}\left[\frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{\delta_{ij}}{1-2\mu}\left(\frac{1+2\mu}{2}+\ln r\right)\right] \tag{6.96}$$

$$\widetilde{D}_{ij}(P,Q_0)=\frac{\alpha G(1+\mu)}{2\pi(1-\mu)r^2}\left[n_m r_m\left(\frac{\delta_{ij}}{1-2\mu}\right.\right.$$

$$-\frac{2r_ir_j}{r^2}\Big)+n_ir_j+n_jr_i\Big] \qquad (6.97)$$

2．三维问题

$$\left.\begin{aligned} P_k(P,Q_0) &= \frac{\alpha(1+\mu)}{8\pi(1-\mu)}(n_kr^2-n_mr_mr_k)/r^3 \\ Q_k(P,Q_0) &= \frac{\alpha(1+\mu)}{8\pi(1-\mu)r}r_k \end{aligned}\right\} \qquad (6.68)$$

$$\widetilde{S}_{ij}(P,Q_0)=\frac{\alpha G(1+\mu)}{4\pi(1-\mu)r}\left(r_ir_j/r^2-\frac{\delta_{ij}}{1-2\mu}\right) \qquad (6.99)$$

$$\widetilde{D}_{ij}(P,Q_0)=\frac{\alpha G(1+\mu)}{4\pi(1-\mu)r^3}\Big[n_mr_m\Big(\frac{\delta_{ij}}{1-2\mu}$$

$$-\frac{3r_ir_j}{r^2}\Big)+n_ir_j+n_jr_i\Big] \qquad (6.100)$$

上述二维问题的公式是按平面应变问题建立起来的。对于平面应力问题，只要将 μ 用 μ' 代替及 α 用 α' 代替就行了。这时

$$\mu'=\mu/(1+\mu),\quad \alpha'=\alpha/(1+\mu) \qquad (6.101)$$

§6.4 计算例题

本节以平面热弹性问题为例，利用样边界元法求它的定常热应力，主要目的是为了考察样条边界元法的可靠性。

【例6.1】 图6.3是一个平面热弹性问题，区域为圆，半径 b 为100，温常分布规律为 $T(r)=100-r$，利用样条边界元法求它的定常热应力。

本例采用三次样条边界元法，将整个边界分为24等分，计算结果如图6.4所示。图6.4为沿半径方向的热应力分布规律。本例是一个轴对称问题，应力分量为

$$\sigma_x=K_1EAT_0,\qquad \sigma_y=K_2EAT_0 \qquad (6.102)$$

式中 T_0 为 $r=0$ 处的温度；K_1及K_2为应力系数，与 r 有关；A 按下列公式确定：

$$A=\begin{cases}\alpha & \text{平面应力问题}\\ \alpha/(1-\mu), & \text{平面应变问题}\end{cases}\qquad(6.103)$$

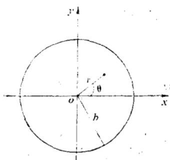


图6.3

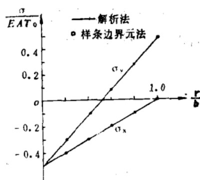


图6.4

【例6.2】 设圆平面的半径 $b=4$，温度分布规律为 $T(r)=9-r^2$，利用样条边界元法求它的定常热应力。

本例采用三次样条边界元法，将整个边界分为16等分，计算结果如图6.5所示。图6.5为沿半径方向的热应力分布规律。

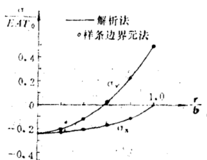


图6.5

【例6.3】 图6.6是一个圆环区域，内径为 a，外径为 b，$a/b=0.25$，内边界温态为 T_0，外边界温度为0，热传导方程为

$$\nabla^2 T=0\qquad(6.104)$$

求它的定常热应力。

温度分布规律由式(6.104)及边界条件确定，所得结果为

$$T(r)=T_0\ln\left(\frac{b}{r}\right)/\ln\left(\frac{b}{a}\right)\qquad(6.105)$$

本例采用三次样条边界元法，将整个边界分为24等分，计算结果如图6.7所示。图6.7为沿半径方向的热应力分布规律。

我们利用样边界元法算过一些平面热弹性问题。计算结果表明，用样条边界元法计算热弹性问题时，能得到较好的结果，而且计算也很简便。

本章只介绍样条边界元法解平面热弹性问题，但这个方法也可以用来解空间热弹性问题。

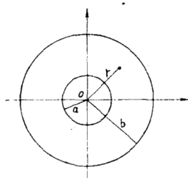


图6.6

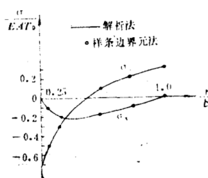


图6.7

参 考 文 献

[1] 秦荣，热弹性问题的样条边界元法，广西大学，1985年。

[2] 田中正隆，田中喜久昭，境界要素法——基础及应用（日文），丸善株式会社，1982年。

[3] Qin Rong（秦荣），Spline Finite-Point Method for Analysis of Thermal Stresses of Shallow Shells，第四届国际热问题数值方法会议论文集，英国，1985年。

[4] 秦荣，地应力问题的样条边界元法，第一届全国计算岩土力学会议论文集，1987年。

第七章　振动的样条边界元法

振动现象普遍发生在自然界。在工程设计中，许多工程结构不仅要作静力分析，而且还要作动力分析。例如，高层建筑要考虑地震和风振的影响；大型水坝要考虑地震的影响；桥梁工程不仅要考虑地震的影响，而且还要考虑桥上各动力荷载的影响；国防工程要有防御能力，必须考虑炸弹及核武器攻击的影响；各种机床的设计要考虑振动的影响。因此，振动在国民经济和国防工程中占很重要的地位，它是一个重要的研究课题。

本章主要介绍弹性振动的样条边界元法，而且以均质各向同性的线性动弹性体作为研究对象。

§7.1　弹性动力问题的样条边界元法

（一）基本方程

弹性力学的动力平衡方程可以写成下列形式：

$$D_{ijkl}u_{k,lj}(Q,t)+b_i(Q,t)-\rho\ddot{u}_i(Q,t)=0 \tag{7.1}$$

对于各向同性体，则式(7.1)便变为

$$(A+G)u_{j,ji}(Q,t)+Gu_{i,jj}(Q,t)+b_i(Q,t)$$
$$-\rho\ddot{u}_i(Q,t)=0 \tag{7.2}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned}u_i(Q,t)&=\overline{u}_i(Q,t) & Q\in\Gamma_u\\ p_i(Q,t)&=\sigma_{ij}n_j=\overline{p}_i(Q,t) & Q\in\Gamma_p\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

初始条件为

$$u_i(Q,0)=\overline{u}_{i0}(Q)\qquad 当 t=0 时 \tag{7.4}$$
$$\dot{u}_i(Q,0)=\overline{v}_{i0}(Q)$$

式中 t 是时间；ρ 是材料的密度；$\ddot{u}_i$ 是加速度分量，它是 u_i 对时间 t 的二阶导数；其余记号的意义与第四章§4.1相同。$i, j, k, l=1, 2, 3$。

（二）边界积分方程

如果在式(7.1)两边乘上基本解 $u^*_{kl}(P,Q)$，则有

$$\int_\Omega [D_{ijkl}u_{k,lj}(Q,t)+b_i(Q,t)-\rho\ddot{u}_i(Q,t)]u^*_{kl}\,d\Omega$$
$$=0 \tag{7.5}$$

式中基本解 u^*_{kl} 与时间无关，与第四章相同。

利用分部积分法，则式(7.5)可变为

$$u_k(P,t)=\int_\Gamma[u^*_{kl}(P,Q_0)p_l(Q_0,t)$$
$$-p^*_{kl}(P,Q_0)u_l(Q_0,t)]\,d\Gamma(Q_0)$$
$$+\int_\Omega u^*_{kl}(P,Q)[b_l(Q,t)-\rho\ddot{u}_l(Q,t)]\,d\Omega(Q) \tag{7.6}$$

当 $P\to P_0$ 时，则式(7.6)便变为下列边界积分方程：

$$C_{kl}(P_0)u_l(P_0,t)+\int_\Gamma[p^*_{kl}(P_0,Q_0)u_l(Q_0,t)$$
$$-u^*_{kl}(P_0,Q_0)p_l(Q_0,t)]\,d\Gamma(Q_0)$$

$$= \int_{\Omega} u_{kl}^{*}(P_0, Q) b_l(Q,t) d\Omega$$

$$- \rho \int_{\Omega} u_{kl}^{*}(P_0, Q) \ddot{u}_l(Q,t) d\,\Omega(Q) \tag{7.7}$$

式(7.7)不仅含有边界未知量，而且还含有域内未知量。为了把域内积分化为边界积分，设

$$\ddot{u}_l(Q,t) = \ddot{\alpha}_l^n(t) q^n(Q) \qquad n = 0,1,2,\cdots, \tag{7.8}$$

则 $\int_{\Omega} u_{kl}^{*}(P_0, Q) \ddot{u}_l(Q,t) d\Omega$

$$= \ddot{\alpha}_l^n(t) \int_{\Omega} q^n(Q) u_{kl}^{*}(P_0, Q) d\Omega \tag{7.9}$$

式(7.9)可以化为边界积分，即

$$\ddot{\alpha}_l^n \int_{\Omega} q^n u_{kl}^{*} d\Omega = \ddot{\alpha}_e^n [C_{kl} u_{el}^n + \int_{\Gamma} (u_{kl}^{*} p_{el}^n - p_{kl}^{*} u_{el}^n) d\Gamma] \quad e = 1,2,3 \tag{7.10}$$

将式(7.9)及式(7.10)代入式(7.7)中便得：

$$C_{kl} u_l + \int_{\Gamma} [p_{kl}^{*} u_l - u_{kl}^{*} p_l] d\Gamma + \rho [C_{kl} u_{el}^n + \int_{\Gamma} (p_{kl}^{*} u_{el}^n - u_{kl}^{*} p_{el}^n) d\Gamma] \ddot{\alpha}_e^n$$

$$= \int_{\Omega} b_l u_{kl}^{*} d\,\Omega \qquad i,j,l,k,e = 1,2,3 \tag{7.11}$$

式中 u_{el}^n 为位移场；p_{el}^n 为面力，即

$$p_{el}^n = \sigma_{elj}^n n_j \qquad e,j,l = 1,2,3 \tag{7.12}$$

其中 σ_{elj}^n 为应力场，它与位移场有下列关系：

$$\sigma^n_{eij} = A\delta_{ij}u^n_{ek,k} + G(u^n_{ei,j} + u^n_{ej,i}) \tag{7.13}$$

当坐标函数$q^n(Q)$选定后，而位移场 u^n_{el} 可用下列平衡方程及其边界条件确定：

$$(A+G)u^n_{el,lj} + Gu^n_{ej,ll} = \delta_{el}q^n(Q) \tag{7.14}$$

式中
$$\delta_{el} = \begin{cases} 1 & e = l \\ 0 & e \neq l \end{cases}$$

当坐标函数$q^n(Q)$选定后，位移场也可以利用式(7.10)、(7.12)及(7.13)确定。

坐标函数$q^n(Q)$的选定决不是唯一的，也可以选择B样条函数构成。因为这些坐标函数只用来逼近惯性项，因此可以选择很简单的形式。例如，坐标函数可以采用下列形式：

$$q^n(Q) = r(\overline{P}_n, Q) \tag{7.15}$$

式中$r(\overline{P}_n, Q)$为$\overline{P}_n$点至Q点的距离。这时，由式(7.10)可得：

$$u^n_{el} = \left[\left(\frac{9-10\mu}{9}\right)\delta_{el} - \frac{r_e r_l}{r^2}\right]\frac{r^3}{30(1-\mu)} \tag{7.16}$$

式中　$r_i = x_i(Q) - x_i(P)$

如果坐标函数采用一个常数C：

$$q^n(Q) = C \tag{7.17}$$

则
$$u^n_{el} = \frac{1-2\mu}{5-4\mu}r_e r_l C \tag{7.18}$$

（三）样条边界元法

本节以平面问题为例（图7.1），而且体力也与时间有关。如果将整个边界Γ分为M部分，则式(7.11)可变为

$$C_{kl}(P_0)u_l(P_0,t)+\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,s,t)$$

$$+\rho\left[C_{kl}(P_0)u^n_{el}(\overline{P}_n,P_0)+\sum_{m=1}^{M}\Pi_{kem}(P_0,s)\right]\ddot{a}^n_e(t)$$

$$=f_k(P_0,t),\quad e,k,l=1,2 \tag{7.19}$$

式中 $$f_k(P_0,t)=\int_{\Omega}u^*_{kl}(P_0,Q)b_l(Q,t)d\Omega(Q) \tag{7.20}$$

$$\Pi_{km}(P_0,s,t)$$

$$=\int_{\Gamma_m}[p^*_{kl}(P_0,s)u_l(s,t)-u^*_{kl}(P_0,s)p_l(s,t)]d\Gamma \tag{7.21}$$

$$\Pi_{kem}(P_0,s)=\int_{\Gamma_m}[p^*_{kl}(P_0,s)u^n_{el}(\overline{P}_n,s)$$

$$-u^*_{kl}(P_0,s)p^n_{el}(\overline{P}_n,s)]d\Gamma \tag{7.22}$$

其中 s 是边界 Γ 的弧坐标，t 是时间。式(7.20)可以化为边界积分。

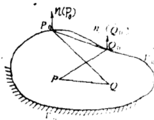


图7.1

利用式(7.19)可以建立样条边界元法的计算格式，下面介绍几种具体做法：

1. 第一种方法

如果将边界 Γ_m 分为 N_m 等分

$$s_0<s_1<s_2<\cdots s_z,\quad z=N_m$$

则式(7.21)和式(7.22)可变为下列形式：

$$\Pi_{km}(P_0,s,t)=\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[p^*_{kl}(P_0,s_i)u_l(s_i,t)$$

$$-u^*_{kl}(P_0,s_i)p_l(s_i,t)]h_m \tag{7.23}$$

$$\Pi_{kem}(P_0,s_i)=\sum_{i=0}^{N_m}\lambda_i[p^*_{kl}(P_0,s_i)u^n_{el}(\overline{P}_n,s_i)$$

$$-u^{*}_{kl}(P_0,s_i)p^{*}_{e\,l}(\overline{P}_n,s_i)\,]\,h_m \tag{7.24}$$

式中 λ_i 是与数值积分法求积公式有关的系数（见第一章）。P_0 在边界Γ上，设$P_0=s_j$（$j=0,1,2,\cdots,N$）；$n=0,1,2,\cdots,N_m$。

将式(7.23)及(7.24)代入式(7.19)便得：

$$R_k(P_0,t)=C_{kl}(P_0)u_l(P_0,t)+\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,s_i,t)$$

$$+\rho\left[C_{kl}(P_0)u^{*}_{e\,l}(\overline{P}_n,P_0)+\sum_{m=1}^{M}\Pi_{kem}(P_0,s_i)\right]\ddot{\alpha}^{*}_{e}(t)$$

$$-f_k(P_0,t)\qquad e,k,l=1,2 \tag{7.25}$$

式中$R_k(P_0,t)$是边界P_0点的残数。由式(7.25)可得：

$$\{R\}=\sum_{m=1}^{M}[\,([H]_{1m}\{u\}_{1m}+[H]_{2m}\{u\}_{2m})-([K]_{1m}\{p\}_{1m}$$

$$+[K]_{2m}\{p\}_{2m})+\rho([J]_{1m}\{\ddot{\alpha}\}_{1m}+[J]_{2m}\{\ddot{\alpha}\}_{2m})]$$

$$-\{f\} \tag{7.26}$$

因为 $\ddot{u}_{km}(s_i,t)=q^n(s_i)\ddot{\alpha}^n_{km}(t)$ (7.27)

因此 $\{\ddot{u}\}_{km}=[q^n(s_i)]_m\{\ddot{\alpha}\}_{km}$ (7.28)

故 $\{\ddot{\alpha}\}_{km}=[E]_m\{\ddot{u}\}_{km}$ (7.29)

式中 $\{u\}_{km}=[u_0\quad u_1\quad u_2\quad\cdots\quad u_z]^T_k$

$\{\alpha\}_{km}=[\alpha^0_k\quad \alpha^1_k\quad\cdots\quad \alpha^z_k]^T$

$$[q^n(s_i)]_m=\begin{bmatrix} q^0(s_0) & q^1(s_0) & \cdots & q^z(s_0)\\ q^0(s_1) & q^1(s_1) & \cdots & q^z(s_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ q^0(s_z) & q^1(s_z) & \cdots & q^z(s_z)\end{bmatrix} \tag{7.30}$$

$$[E]_m=[q^n(s_i)]^{-1}_m \tag{7.31}$$

其中 $z=N_m$

将式(7.29)代入式(7.26)便得：

$$\{R\}=\sum_{m=1}^{M}[([H]_{1m}\{u\}_{1m}+[H]_{2m}\{u\}_{2m})-([K]_{1m}\{p\}_{1m}+[K]_{2m}\{p\}_{2m})+([M]_{1m}\{\ddot{u}\}_{1m}+[M]_{2m}\{\ddot{u}\}_{2m})]-\{f\} \tag{7.32}$$

式中 $$[M]_{km}=\rho[J]_{km}[E]_{km} \tag{7.33}$$

$$[J]_{km}=([C]_m+h_m[\widetilde{p^*}]_m[\wedge]_m)[\widetilde{u}]_{km}+h_m[\widetilde{u^*}]_m[\wedge]_m[\widetilde{p}]_{km} \tag{7.34}$$

$$[C]_m=\begin{bmatrix}[C]_{11}^{B} & [C]_{12}^{B}\\ [C]_{21}^{B} & [C]_{22}^{B}\end{bmatrix}_m \tag{7.35}$$

$$[\widetilde{p^*}]_m=\begin{bmatrix}[p^*]_{11} & [p^*]_{12}\\ [p^*]_{21} & [p^*]_{22}\end{bmatrix}_m \tag{7.36}$$

$$[\widetilde{u^*}]_m=\begin{bmatrix}[u^*]_{11} & [u^*]_{12}\\ [u^*]_{21} & [u^*]_{22}\end{bmatrix} \tag{7.37}$$

$$[\wedge]_m=\mathrm{diag}([\lambda]_m,\ [\lambda]_m) \tag{7.38}$$

$$[\lambda]_m=\mathrm{diag}(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_s)$$

$$[\widetilde{u}]_{km}=\begin{bmatrix}\{u_{k1}\}_0 & \{u_{k1}\}_1 & \cdots & \{u_{k1}\}_s\\ \{u_{k2}\}_0 & \{u_{k2}\}_1 & \cdots & \{u_{k2}\}_s\end{bmatrix} \tag{7.39}$$

$$[\widetilde{p}]_{km}=\begin{bmatrix}\{p_{k1}\}_0 & \{p_{k1}\}_1 & \cdots & \{p_{k1}\}_s\\ \{p_{k2}\}_0 & \{p_{k2}\}_1 & \cdots & \{p_{k2}\}_s\end{bmatrix} \tag{7.40}$$

其中
$$\left.\begin{aligned}\{u_{kl}\}_n&=[u_{kl}^n(\overline{P}_n,s_0)\quad u_{kl}^n(\overline{P}_n,s_1)\quad\cdots\quad u_{kl}^n(\overline{P}_n,s_s)]^T\\ \{p_{kl}\}_n&=[p_{kl}^n(\overline{P}_n,s_0)\quad p_{kl}^n(\overline{P}_n,s_1)\quad\cdots\quad p_{kl}^n(\overline{P}_n,s_s)]^T\end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

$k,l=1,2$。其余记号与第四章§4.4相同，详见式(4.86)至式(4.96)。由式(7.32)可得：

$$\{R\}=[H]\{u\}+[M]\{\ddot{u}\}-[K]\{p\}-\{f\} \tag{7.42}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}[H]&=[[H]_1 \quad [H]_2]\\ [K]&=[[K]_1 \quad [K]_2]\\ [M]&=[[M]_1 \quad [M]_2]\end{aligned}\right\} \tag{7.43}$$

$$\{u\}=[\{u\}_1^T \quad \{u\}_2^T]^T$$

$$\{p\}=[\{p\}_1^T \quad \{p\}_2^T]^T$$

其中

$$\left.\begin{aligned}[H]_k&=[[H]_{k1} \quad [H]_{k2} \ \cdots \ [H]_{kM}]\\ [K]_k&=[[K]_{k1} \quad [K]_{k2} \ \cdots \ [K]_{kM}]\\ [M]_k&=[[M]_{k1} \quad [M]_{k2} \ \cdots \ [M]_{kM}]\end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

$$\{u\}_k=[\{u\}_{k1}^T \quad \{u\}_{k2}^T \ \cdots \ \{u\}_{kM}^T]^T$$

$$\{p\}_k=[\{p\}_{k1}^T \quad \{p\}_{k2}^T \ \cdots \ \{p\}_{kM}^T]^T$$

利用配点法可知：

$$\{R\}=\{0\} \tag{7.45}$$

将式(7.42)代入式(7.45)可得：

$$[H]\{u\}+[M]\{\ddot{u}\}=[K]\{p\}+\{f\} \tag{7.46}$$

式(7.46)是一个常微分方程组，利用它可以求出弹性力学瞬态振动问题的动力响应。式(7.46)的求解方法见文献[6]。如果不计体力，则$b_i=0$，因此$\{f\}=\{0\}$。

2. 第二种方法

如果用三次B样条函数来逼近边界未知量，则由第四章可知：

$$\left.\begin{aligned}u_{lm}(s,t)&=[\phi(s)]\{a(t)\}_{lm}\\ p_{lm}(s,t)&=[\phi(s)]\{b(t)\}_{lm}\end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

式中 $\{a\}_{lm}=[u_0 \quad a_1 \quad a_2 \ \cdots \ a_{s-1} \quad u_s]^T$

$\{b\}_{lm}=[p_0 \quad b_1 \quad b_2 \ \cdots \ b_{s-1} \quad p_s]^T$

将式(7.47)代入式(7.19)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}[([\overline{H}]_{1m}\{a\}_{1m}+[\overline{H}]_{2m}\{a\}_{2m})+([\overline{M}]_{1m}\{\ddot{a}\}_{1m}+[\overline{M}]_{2m}\{\ddot{a}\}_{2m})]=\{f\}+\sum_{m=1}^{M}([\overline{K}]_{1m}\{b\}_{1m}+[\overline{K}]_{2m}\{b\}_{2m}) \tag{7.48}$$

由此可得：

$$[H]\{a\}+[M]\{\ddot{a}\}=[K]\{b\}+\{f\} \tag{7.49}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}[H]&=[[\overline{H}]_1 \quad [\overline{H}]_2]\\ [K]&=[[\overline{K}]_1 \quad [\overline{K}]_2]\\ [M]&=[[\overline{M}]_1 \quad [\overline{M}]_2]\end{aligned}\right\} \tag{7.50a}$$

$$\{a\}=[\{a\}_1^T \quad \{a\}_2^T]^T,\ \{b\}=[\{b\}_1^T \quad \{b\}_2^T]^T$$

其中 $\{a\}_l=[\{a\}_{l1}^T \quad \{a\}_{l2}^T \ \cdots \ \{a\}_{lM}^T]^T$

$\{b\}_l=[\{b\}_{l1}^T \quad \{b\}_{l2}^T \ \cdots \ \{b\}_{lm}^T]^T$

$$\left.\begin{aligned}[\overline{H}]_l&=[[\overline{H}]_{l1} \quad [\overline{H}]_{l2} \ \cdots \ [\overline{H}]_{lM}]\\ [\overline{K}]_l&=[[\overline{K}]_{l1} \quad [\overline{K}]_{l2} \ \cdots \ [\overline{K}]_{lM}]\\ [\overline{M}]_l&=[[\overline{M}]_{l1} \quad [\overline{M}]_{l2} \ \cdots \ [\overline{M}]_{lM}]\end{aligned}\right\} \tag{7.50b}$$

$$\left.\begin{aligned}[\overline{H}]_{lm}&=[H]_{lm}[N]_m+[H_0]_{lm}[N']_m\\ [\overline{K}]_{lm}&=[K]_{lm}[N]_m+[K_0]_{lm}[N']_m\\ [\overline{M}]_{lm}&=[M]_{lm}[N]_m+[M_0]_{lm}[N']_m\end{aligned}\right\} \tag{7.51c}$$

$$[N]_m=[B]_m[Q]_m,\ [N']_m=[B']_m[Q]_m$$

式中$[B]_m$和$[B']_m$分别由第三章的式(3.69)、式(3.70)确定；$[K]_{lm}$和$[H]_{lm}$由第四章式(4.90)确定；$[H_0]_{lm}$，$[K_0]_{lm}$和$[M_0]_{lm}$可由下列公式确定：

$$
\begin{aligned}
&[H_0]_{lm} = h_m[p_0^*(s_j,s_i)]_{lm}[\lambda]_m \\
&[K_0]_{lm} = h_m[u_0^*(s_j,s_i)]_{lm}[\lambda]_m \\
&[M_0]_{lm} = [0]
\end{aligned}
\tag{7.51a}
$$

式中

$$
[p_0^*]_{lm} = \begin{bmatrix} [p^*]_{1lm} \\ [p^*]_{2lm} \end{bmatrix},\quad [u_0^*]_{lm} = \begin{bmatrix} [u^*]_{1lm} \\ [u^*]_{2lm} \end{bmatrix} \tag{7.51b}
$$

式(7.51b)利用第五章式(5.98)确定。

式(7.49)是一个常微分方程组，利用它及式(7.47)可求出弹性力学瞬态振动的动力响应。

3. 第三种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则

$$
\left.
\begin{aligned}
u_l(s,t) &= \sum_{i=0}^{z} \phi_i(s) u_{li}(t) \\
p_l(s,t) &= \sum_{i=0}^{z} \phi_i(s) p_{li}(t)
\end{aligned}
\right\}
\tag{7.52}
$$

式中　$z=N_m$，$\phi_i(s)$采用第一章式(1.27)的形式；$u_{li}(t)=u_l(s_i,t)$，$p_{li}(t)=p_l(s_i,t)$。将式(7.52)代入式(7.19)可得：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{M}[([H]_{1m}\{u\}_{1m}+[H]_{2m}\{u\}_{2m}) + ([M]_{1m}\{\ddot{u}\}_{1m} \\
&\quad + [M]_{2m}\{\ddot{u}\}_{2m})] = \sum_{m=1}^{M}([K]_{1m}\{p\}_{1m}+[K]_{2m}\{p\}_{2m}) \\
&\quad + \{f\}
\end{aligned}
\tag{7.53}
$$

式中$[H]_{lm}$和$[K]_{lm}$由第四章式(4.136)确定，而$[M]_{lm}$由下列公式确定：

$$[M]_{lm}=\rho[J]_{lm}[E]_{lm} \tag{7.54}$$

式中

$$[J]_{lm}=[C]_m[u]_{lm}+[J_1]_{lm}+[J_2]_{lm} \tag{7.54a}$$

$$\left.\begin{aligned}[J_1]_{lm}&=\sum_{i=0}^{z-1}\int_{S_i}^{S_{i+1}}[p^*]_m[u]_{em}d\Gamma(s)\\ [J_2]_{lm}&=\sum_{i=0}^{z-1}\int_{S_i}^{S_{i+1}}[u^*]_m[p]_{em}d\Gamma(s)\end{aligned}\right\} \tag{7.54b}$$

其中$z=N_m$，而$[u]_{em}$及$[p]_{em}$由下列公式确定：

$$[u]_{em}=\begin{bmatrix}u_{e1}^0 & u_{e1}^1 & u_{e1}^2 & \cdots & u_{e1}^z\\ u_{e2}^0 & u_{e2}^1 & u_{e2}^2 & \cdots & u^z_{2}\end{bmatrix}_m$$

$$[p]_{em}=\begin{bmatrix}p_{e1}^0 & p_{e1}^1 & p_{e2}^3 & \cdots & p_{e1}^z\\ p_{e2}^0 & p_{e2}^1 & p_{e2}^2 & \cdots & p_{e2}^z\end{bmatrix}_m$$

$$[p^*]=\begin{bmatrix}p_{11}^* & p_{12}^*\\ p_{21}^* & p_{22}^*\end{bmatrix}_m,\quad [u^*]_m=\begin{bmatrix}u_{11}^* & u_{12}^*\\ u_{21}^* & u_{22}^*\end{bmatrix}_m$$

$$u_{el}^*=u_{el}^*(\overline{P}_n,s),\quad p_{el}^*=p_{el}^*(\overline{P}_n,s)$$

$$u_{kl}^*=u_{kl}^*(P_0,s),\quad p_{kl}^*=p_{kl}(P_0,s)$$

（四）计算例题

为了考查这个瞬态振动样条边界元法的正确性，我们对文献[5]的两个例题进行计算。计算结果表明，利用样条边界元法计算瞬态振动问题是一个经济有效的方法。

【例7.1】 图7.2(a)是一个平面问题，$E=10^5$，$\mu=0.25$，$\rho=1.0$；受图7.2(b)所示的瞬时剪力作用。利用样条边界元法计算这个平面问题的瞬态动力响应。

本例采用三次样条边界元法进行计算，将整个边界分为4个

区域，每个边界又分为4等分；$\overline{P}_n$取边界结点，并令$\overline{P}_n=s_n$（$n=0,1,2,\cdots,N_m$）；所得$u_H(A,t)$的计算结果见图7·2(c)，$u_H(A,t)$是A点水平位移的动力响应。这个结果与440个自由度的有限元法计算结果非常接近，但样条边界元法算出这个结果时只有40个自由度。

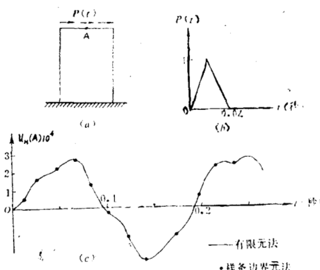


图7.2

【例7.2】 图7.3(a)是一个平面问题，带方孔，$E=10^5$，$\mu=0.2$，$\rho=1.0$；受图7.3(b)所示突加荷载的作用。利用三次样条边界元法计算这个平面问题的动力响应。

本例将整个边界分为8个区域，每个边界区域又分为4等分；$\overline{P}_n$取边界结点，并令$\overline{P}_n=s_n$（$n=0,1,2,\cdots,N_m$）；所得$u_H(A,t)$及$u_V(A,t)$的计算结果分别见图7.3(c)及图7.3(d)，$u_H(A,t)$及$u_V(A,t)$分别为A点水平位移及竖向位移的动力响应。这个结果与202个自由度的有限元法计算结果非常接近，但样条边界元法用48个自由度的计算模型就可算出这个结果。

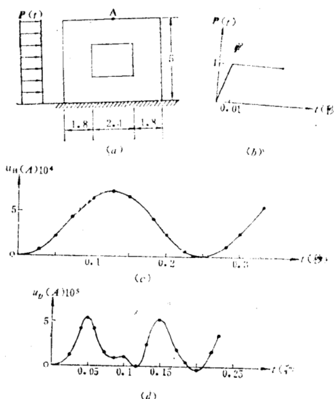


图7.3

§7.2 薄板振动的样条边界元法

(一)边界积分方程

薄板振动的边界积分方程可以直接从第五章式(5.40)和式(5.41)写出来，即

$$
\begin{aligned}
C(P)w(P,t) = &\int_{\Gamma}[w_1^*(P,s)V_n(s,t) - \theta_1^*(P,s)M_n(s,t) \\
&- V_{n1}^*(P,s)w(s,t) + M_{n1}^*(P,s)\theta(s,t)]d\Gamma(s) + T_1 \\
&- \int_{\Omega}\rho w_1^*(P,Q)\ddot{w}(Q,t)d\Omega + f_1 \qquad (7.55)
\end{aligned}
$$

$$C(P)\theta(P,t)=\int_{\Gamma}[w_2^*(P,s)V_n(s,t)-\theta_2^*(P,s)M_n(s,t)$$

$$-V_{n2}^*(P,s)w(s,t)+M_{n2}^*(P,s)\theta(s,t)]d\Gamma(s)+T_2$$

$$-\int_{\Omega}\rho w_2^*(P,Q)\ddot{w}(Q,t)d\Omega+f_2 \tag{7.56}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}f_1&=\int_{\Omega}w_1^*(P,Q)Z_0(Q,t)d\Omega(Q)\\f_2&=\int_{\Omega}w_2^*(P,Q)Z_0(Q,t)d\Omega(Q)\end{aligned}\right\} \tag{7.57}$$

式中 ρ 是薄板的单位面积的质量，Q 是板上的任一点，其余记号与第五章相同。

设
$$\ddot{w}(Q,t)=\sum_{e=0}^{z}\ddot{a}_e(t)q_e(Q) \tag{7.58}$$

则
$$\int_{\Omega}\rho w_k^*(P,Q)\ddot{w}(Q,t)d\Omega=\rho\int_{\Omega}w_k^*(P,Q)[q]d\Omega\{\ddot{a}\} \tag{7.59}$$

式中
$$[q]=[q_0(Q)\quad q_1(Q)\ \cdots\ q_z(Q)]$$
$$\{a\}=[a_0(t)\quad a_1(t)\ \cdots\ a_z(t)]^T$$

其中 $z=N_m$。式(7.59)可以化为边界积分，下面介绍三种方法：

1．第一种方法

设
$$D\nabla^2\nabla^2 w_e(Q)=q_e(Q)\qquad Q\in\Omega \tag{7.60}$$

式中
$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) \tag{7.61}$$

则式(7.59)可变为下列形式：

$$\int_{\Omega}w_k^*(P,Q)q_e(Q)d\Omega=C(P)w_e(\overline{P}_e,P)$$

$$-\int_{\Gamma}[w_k^*(P,s)V_{ne}(\overline{P}_e,s)-\theta_k^*(P,s)M_{ne}(\overline{P}_e,s)$$

$$-V_{nk}^*(P,s)w_e(\overline{P}_e,s)+M_{nk}^*(P,s)\theta_e(\overline{P}_e,s)]d\Gamma \tag{7.62}$$

式中$k=1,2$。

当坐标函数$q_e(Q)$选定后，可以利用式(7.60)求出$w_e(Q)$。坐标函数$q_e(Q)$的选定决不是唯一的，如果坐标函数采用下列形式：

$$q_e(Q)=r(\overline{P}_e,Q) \tag{7.63}$$

则利用式(7.60)可得：

$$w_e(Q)=r^5/225D \tag{7.64}$$

利用相应的公式可得$\theta_e(Q)$、$M_{ne}(Q)$及$V_{ne}(Q)$的表达式。r为$\overline{P}_e$点至Q点的距离。

2. 第二种方法

设 $$\nabla^2 q_e(Q)=0 \qquad Q\in\Omega \tag{7.65}$$

$$\nabla^2 F_k=w_k^*(P,Q) \qquad k=1,2 \tag{7.66}$$

则 $$\int_\Omega w_k^*(P,Q)q_e(Q)\,d\Omega=\int_\Gamma\left(q_e\frac{\partial F_k}{\partial n}-F_k\frac{\partial q_e}{\partial n}\right)d\Gamma \tag{7.67}$$

式中$q_e(Q)$按解析函数的完备系确定。如果设

$$z=x+iy,\quad \overline{z}=x-iy$$

则式(7.65)可变为下列形式：

$$\nabla^2 q=4\frac{\partial^2 q}{\partial z\partial\overline{z}}=0 \tag{7.68}$$

它的一般解为

$$q=\varphi(z)+\overline{\varphi(z)} \tag{7.69}$$

式中$\varphi(z)$是解析函数，$\overline{\varphi(z)}$是它的共轭。解析函数的完备系为

$$1,\ z,\ z^2,\ \cdots z^n,\ \cdots \tag{7.70}$$

式中 $$z^n=(x+iy)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \tag{7.71}$$

由上述可知，式(7.65)的特解就是式(7.71)的实部和虚部，因此

$$q_e = 1, x, y, x^2 - y^2,\ 2xy, x^3 - 3xy,\ 3x^2y - y^3,\ \cdots \quad (7.72)$$

或 $$q_e = r^n \cos n\theta,\ r^n \sin n\theta\ (n = 0, 1, 2, \cdots) \quad (7.73)$$

式中 θ 为 z 的向量与 x 轴的夹角，r 为 z 的模。

3. 第三种方法

如果设 $$\frac{\partial F}{\partial x} = qw^* \quad (7.74)$$

则 $$\int_\Omega qw^* d\Omega = \int_\Gamma F\cos(n, x) d\Gamma \quad (7.75)$$

如果设 $$\frac{\partial (rF)}{\partial r} = qw^* r \quad (7.76)$$

则 $$\int_\Omega qw^* d\Omega = \int_\Gamma F\cos\gamma\, d\Gamma \quad (7.77)$$

式中 γ 为 $\overline{PQ_0}$ 的延线与 $n(Q_0)$ 的夹角，q 以 P 点为极的极坐标形式表示，$r = \overline{PQ}$ 为极坐标。当坐标函数 q 选定后，F 利用式(7.74)或式(7.76)确定。

(二)样条边界元法

如果将边界分为 M 个区域，则式(7.55)和式(7.56)可变为下列形式：

$$C(P_0)w_k(P_0, t) = \sum_{m=1}^{M} \Pi_{km}(P_0, s, t) + T_k(P_0, A_l, t) - \bar{f}_k + f_k \quad (7.78)$$

式中 $w_1 = w$，$w_2 = \theta$，$w_3 = \psi$

$$f_k = \sum_{m=1}^{M} \int_{\Gamma_m} F_{km}(P_0, s, t) \cos\gamma d\Gamma \tag{7.79}$$

$$\overline{f}_k = \sum_{m=1}^{M} \rho \int_{\Gamma_m} [\overline{F}]_{km} \cos\gamma \, d\Gamma \{\ddot{a}\}_m \tag{7.80}$$

$$[\overline{F}] = [F_0(P_0, s) \quad F_1(P_0, s) \cdots F_z(P_0, s)]$$

式中F_k及$\overline{F}_{ck}$由式(7.76)确定。其余记号与第五章相同（见§5.3）。$k=3$的积分方程为补充方程。

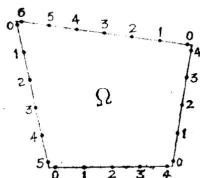


图7.4

1. 第一种方法

如果将每个边界区域分为M_m等分（图7.4）：

$$s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_z, \quad z = N_m$$

$$s_i = s_0 + i h_m, \quad h_m = s_{i+1} - s_i = l_m / z$$

则式(7.78)可变为

$$R_k(P_0,t)=C(P_0)w_k(P_0,t)-\sum_{m=1}^{M}\Pi_{km}(P_0,s,t)$$

$$-T_k(P_0,A_l,t)+\bar{f}_k-f_k \qquad k=1,2,3 \tag{7.81}$$

式中 $$f_k=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z}\lambda_i F_{km}(P_0,s_i,t)\cos\gamma_i h_m \tag{7.82}$$

$$\bar{f}_k=\sum_{m=1}^{M}\rho\left(\sum_{i=0}^{z}\lambda_i[\bar{F}(P_0,s_i)]_{km}\cos\gamma_i\right)h_m\{\ddot{\alpha}\}_m \tag{7.83}$$

当$k=1,2$时，式中$P_0=s_j$（$j=0,1,2,\cdots,N$）；当$k=3$时，$P_0=A_j$（$j=1,2,\cdots,L$）。由式(7.81)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([D]_{km}\{w\}-[M]_{km}\{\theta\}_m-[H]_{km}\{V\}_m+[K]_{km}\{M\}_m$$

$$+[G]_{km}\{\ddot{w}\}_m)-[T]_k\{c\}=\{f\}_k \quad k=1,2,3 \tag{7.84}$$

式中 $$\{U\}_m=[U_0 \quad U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_z]^T$$

$$U=w,\theta,V_n,M_n,\ddot{w};\ z=N_m$$

$$[D]_{km}=[V]_{km}+[R]_{km} \tag{7.85}$$

$$\left.\begin{aligned}&[V]_{km}=h_m[V^*_{nk}]_m[\lambda]_m+[C]^B_m\delta_{1k}\\&[M]_{km}=h_m[M^*_{nk}]_m[\lambda]_m-[C]^B_m\delta_{2k}\\&[H]_{km}=h_m[w^*_k]_m[\lambda]_m,\ [K]_{km}=h_m[\theta^*_k]_m[\lambda]_m\end{aligned}\right\} \tag{7.86}$$

$$\{f\}_k=\sum_{m=1}^{M}h_m[F]_{km}[\lambda]_m\{\cos\gamma_i\}_m \tag{7.87}$$

$$[G]_{km}=h_m[\bar{F}]_{km}([\lambda]_m\{\cos\gamma_i\}_m)\otimes[q]_m^{-1}\rho \tag{7.88}$$

其中 $$\left.\begin{aligned}&[F]_{km}=[F(s_j,s_i,t)]_{km} \qquad k=1,2\\&[F]_{3m}=[F(A_j,s_i,t)]_{3m} \quad (j=1,2,\cdots,L)\end{aligned}\right\} \tag{7.89}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&[\overline{F}]_{km}=[[\overline{F}(s_0)]\quad[\overline{F}(s_1)]\ \cdots\ [\overline{F}(s_z)]]_{km}\\
&[\overline{F}(s_l)]_{km}=[\overline{F}_{je}]_{km}\quad e,l=0,1,2,\cdots,z\\
&\overline{F}_{je}=\overline{F}_e(s_j,s_l)\quad k=1,2\\
&\overline{F}_{je}=\overline{F}_e(A_j,s_i)\quad k=3
\end{aligned}\right\}\tag{7.90}
$$

$$
[q]_m=[q_{ie}]_m, q_{ie}=q_e(s_i),\ i,e=0,1,2,\cdots,z \tag{7.91}
$$

$[A]\otimes[B]$叫做矩阵$[A]$与矩阵$[B]$的Kronecker乘积，也称矩阵的直接乘积，即

$$
[A]\otimes[B]=[a_{ij}[B]] \tag{7.92}
$$

其余记号与第五章相同，见式(5.63)～式(5.85)。由式(7.84)可得：

$$
\begin{aligned}
&[D]_k\{w\}+[G]_k\{\ddot{w}\}=[M]_k\{\theta\}+[H]_k\{V\}-[K]_k\{M\}\\
&\quad+[T]_k\{c\}+\{f\}_k\quad k=1,2,3
\end{aligned}\tag{7.93}
$$

式(7.93)与边界条件及角点条件有关，计算时必须引入边界条件及角点条件。

如果薄板周边无角点，则$\Delta M_{ns}=\Delta M^{*}_{nsk}=0$，因此，$\{c\}=[R]_{km}=0$。在这种情况，可以删掉$k=3$所示的补充方程，然后引入边界条件。

如果薄板周边固定且有角点，由于边界上$w=\theta=\psi=0$，则$\{w\}=\{\theta\}=\{c\}=\{0\}$。在这种情况下，可以删掉$k=3$的补充方程。

如果薄板周边简支且有角点，由于边界上$w=M_n=\psi=0$，则$\{w\}=\{M\}=\{0\}$。

如果薄板周边自由且有角点，由于边界上$M_n=M_{ns}=V_n=0$，而且角点的ψ与θ存在一定关系，则$\{M\}=\{V\}=\{c\}=\{0\}$。在这种情况下，可以删掉$k=3$的补充方程。

对于混合边界及角点支撑的问题，按第五章的办法处理。由上述可知，当$\{\ddot{w}\}=\{0\}$，则式(7.93)便是静力问题的基本方程。由式(7.93)可得：

$$[M]\{\ddot{U}\}+[G]\{U\}=[H]\{P\}+\{f\} \tag{7.94}$$

式中 $\{U\}=[\{w\}^T\ \{\theta\}^T]^T$，$\{P\}=[\{V\}^T\ \{M\}^T\ \{c\}^T]^T$ (7.95)

$$[G]=\begin{bmatrix}[D]_1 & -[M]_1\\ [D]_2 & -[M]_2\\ [D]_3 & -[M]_3\end{bmatrix},\quad [M]=\begin{bmatrix}[G]_1 & [0]\\ [G]_2 & [0]\\ [G]_3 & [0]\end{bmatrix} \tag{7.96}$$

$$[H]=\begin{bmatrix}[H]_1 & -[K]_1 & [T]_1\\ [H]_2 & -[K]_2 & [T]_2\\ [H]_3 & -[K]_3 & [T]_3\end{bmatrix} \tag{7.97}$$

$$\{f\}=[\{f\}_1^T\ \ \{f\}_2^T\ \ \{f\}_3^T]^T \tag{7.98}$$

式(7.94)是一个常微分方程组，利用它可以求出薄板的动力响应，但要注意引入边界条件及角点条件。当引入边界条件及角点条件后，则式(7.94)便变为下列形式：

$$[A]\{\ddot{X}\}+[B]\{X\}=\{f\} \tag{7.99}$$

式中$[A]$，$[B]$及$\{X\}$与边界条件及角点条件有关。例如，对于周边固定的薄板，则

$$\{X\}=[\{w\}^T\ \ \{V\}^T\ \ \{M\}^T]^T$$

$$[A]=\begin{bmatrix}[G]_1 & [0] & [0]\\ [G]_2 & [0] & [0]\end{bmatrix} \tag{7.100}$$

$$[B]=\begin{bmatrix}[0] & -[H]_1 & [K]_1\\ [0] & -[H]_2 & [K]_2\end{bmatrix} \tag{7.101}$$

式(7.99)的求解方法见文献[6]。

2. 第二种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则利用式(5.92)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}[([D]_{km}\{w\}_m-[M]_{km}\{\theta\}_m-[H]_{km}\{V\}_m+[K]_{km}[M]_m$$

$$+[G]_{km}\{\ddot{w}\}_m)+([D_0]_{km}\{w'\}_m-[M_0]_{km}\{\theta'\}_m$$

$$-[H_0]_{km}\{V'\}_m+[K_0]_{km}\{M'\}_m+[G_0]_{km}\{\ddot{w}'\}_m)$$

$$-[T]_k\{c\}=\{f\}_k \qquad k=1,2,3 \tag{7.102}$$

式中 $\{U'\}=[U_0' \quad U_1' \quad U_2' \cdots U_s']^T$

$$U=w,\ \theta,\ V_n,\ M_n,\ \ddot{w}$$

如果边界未知量采用三次B样条函数来逼近，则

$$\left.\begin{aligned}U(s,t)&=[\phi(s)]\{S(t)\}_m\\U'(s,t)&=[\phi'(s)]\{S(t)\}_m\end{aligned}\right\} \tag{7.103}$$

式中 $\{S\}_m=[U_0 \ S_1 \ S_2 \cdots S_{s-1} \ U_s]^T$

$S=a,\ b,\ A,\ B$

将式(7.103)代入式(7.102)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([\widetilde{D}]_{km}\{a\}_m+[\widetilde{G}]_{km}\{\ddot{a}\}_m)=\sum_{m=1}^{M}([\widetilde{M}]_{km}\{b\}_m$$

$$+[\widetilde{H}]_{km}\{A\}_m-[\widetilde{K}]_{km}\{B\}_m)+[T]_k\{c\}$$

$$=\{f\}_k \qquad k=1,2,3 \tag{7.104}$$

式中 $$[\widetilde{G}]_{km}=[G]_{km}[N]_m+[G_0]_{km}[N']_m \tag{7.105}$$

式中$[G_0]_{km}$可以采用下列形式：

$$[G_0]_{km}=[0]$$

$[G]_{km}$利用式(7.88)确定；其余记号与第五章相同。由式(7.104)可得

$$[\widetilde{D}]_k\{a\}+[\widetilde{G}]_k\{\ddot{a}\}=[\widetilde{M}]_k\{b\}+[\widetilde{H}]_k\{A\}-[\widetilde{K}]_k\{B\}$$
$$+[T]_k\{c\}+\{f\}_k \qquad k=1,2,3 \tag{7.106}$$

由此可得：

$$[\widetilde{M}]\{\ddot{W}\}+[\widetilde{G}]\{W\}=[\widetilde{H}]\{Q\}+\{f\} \tag{7.107}$$

式中 $\{W\}=[\{a\}^T \quad \{b\}^T]^T$，$\{Q\}=[\{A\}^T \quad \{B\}^T \quad \{c\}^T]^T$

$[\widetilde{M}]$，$[\widetilde{H}]$及$[\widetilde{G}]$的形式与式(7.96)及式(7.97)相同，只要这两式加上～线就行了。

3. **第三种方法**

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则

$$U(s,t)=\sum_{i=0}^{z}\phi_i(s)U_i(t) \tag{7.108}$$

式中$z=N_m$，$\phi_i(s)$采用式(1.27)的形式。将式(7.108)代入式(7.78)可得：

$$C(P_0)w_k(P_0,t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z}\Big[\Big(\int_{\Gamma_m}w_k^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)V_i(s)$$
$$-\Big(\int_{\Gamma_m}\theta_k^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)M_i(t)$$
$$-\Big(\int_{\Gamma_m}V_{nk}^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)w_i(t)$$
$$+\Big(\int_{\Gamma_m}M_{nk}^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)\theta_i(t)\Big]+T_k(P_0,A_l,t)$$
$$-\overline{f}_k(P_0,t)+f_k(P_0,t) \qquad k=1,2,3 \tag{7.109}$$

式中　$w_1=w,\ w_2=\theta,\ w_3=\psi$

$$f_k(P_0,t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=0}^{z-1}\int_{S_i}^{S_{i+1}}F_{km}(P_0,s,t)\cos\gamma\,d\Gamma(s) \tag{7.110}$$

$$\overline{f}_k(P_0,t)=\sum_{m=1}^{M}\left(\rho\sum_{i=1}^{z-1}\int_{S_i}^{S_{i+1}}[\overline{F}]_{km}\cos\gamma\,d\Gamma\right)\{\ddot{\alpha}\}_m \tag{7.111}$$

$$\sum_{i=0}^{z}\int_{\Gamma_m}H_m(P_0,s)\,d\Gamma=\sum_{i=0}^{z-1}\int_{S_i}^{S_{i+1}}H_m(P_0,s)\,d\Gamma \tag{7.112}$$

由式(7.109)可得：

$$\sum_{m=1}^{M}([D]_{km}\{w\}_m+[G]_{km}\{\ddot{w}\}_m)=\sum_{m=1}^{M}([M]_{km}\{\theta\}_m$$

$$+[H]_{km}\{V\}_m-[K]_{km}\{M\}_m)+[T]_k\{c\}+\{f\}_k \tag{7.113}$$

式中
$$\left.\begin{aligned}\{f\}_1&=[f_1(s_0,t)\quad f_1(s_1,t)\ \cdots\ f_1(s_z,t)]^T\\ \{f\}_2&=[f_2(s_0,t)\quad f_2(s_1,t)\ \cdots\ f_2(s_z,t)]^T\\ \{f\}_3&=[f_3(A_1,t)\quad f_3(A_2,t)\ \cdots\ f_3(A_L,t)]^T\end{aligned}\right\} \tag{7.114}$$

$$[G]_{km}=\rho[J]_{km}[E]_m\qquad k=1,2,3 \tag{7.115}$$

$$[J]_{km}=\left[\int_{S_i}^{S_{i+1}}[\overline{F}(P_0,s)]_{km}\cos\gamma\,d\Gamma\right] \tag{7.116}$$

其余记号与第五章式(5.118)～式(5.128)相同。由式(7.113)可得：

$$[M]\{\ddot{U}\}+[G]\{U\}=[H]\{P\}+\{f\} \tag{7.117}$$

所有记号与式(7.94)相同，见式(7.95)～式(7.97)。

（三）薄板自由振动

如果只考虑薄板的自由振动，则$Z_0=0$。如果令$\{X\}=$

$\{X^*\}\sin\omega t$，则式(7.99)可变为

$$[A]\{X^*\}=\omega^2[B]\{X^*\} \tag{7.118}$$

式中　ω为自振频率。利用式(7.118)可以确定薄板的自振频率及相应的振型。

【例7.3】 利用样条边界元法求解四边固定薄板的自振频率，已知$a=b=1$，$\rho=1$，$D=1$。利用样条边界元法求出的自振频率列在表7.1中。

表7.1　　薄板的自振频率

自振频率	样条边界元法	样条有限点法	有限条法
ω_1	36.02	36.03	36.05
ω_2	73.39	73.42	73.44
ω_3	73.54	73.64	73.75
ω_4	108.41	108.49	108.53
ω_5	132.34	132.47	133.53

§7.3 扁壳振动的样条边界元法

(一)基本方程

弹性扁壳振动的微分方程可以直接从第五章的结果列出来，即

$$\left.\begin{aligned}L_x(u,v,w)+X/B=0\\L_y(u,v,w)+Y/B=0\\L_z(u,v,w)+Z/B=0\end{aligned}\right\} \tag{7.119}$$

式中　$u=u(Q,t)$，$v=v(Q,t)$，$w=w(Q,t)$

$$\left.\begin{array}{l} X = -\rho\ddot{u}(Q,t), \quad Y = -\rho\ddot{v}(Q,t) \\ Z = Z_0(Q,t) - \rho\ddot{w}(Q,t) \end{array}\right\}$$

式中 ρ 是扁壳的单位面积的质量，Q 是扁壳上的任意点，其余记号与第五章相同。

（二）边界积分方程

由式(5.25)和式(5.26)可得扁壳的边界积分方程：

$$C(P)u_k(P,t) = \int_\Gamma ([U^*]_k\{N\} - [N^*]_k\{U\})d\Gamma(s)$$

$$+ T_k + \overline{f}_k \qquad k = 1,2,3,4 \qquad (7.120)$$

式中 $\overline{f}_k = \int_\Omega [u_k^*(P,Q)X(Q,t) + v_k^*(P,Q)Y(Q,t)$

$$+ w_k^*(P,Q)Z(Q,t)]d\Omega$$

$$u_1 = u, \ u_2 = v, \ u_3 = w, \ u_4 = \theta$$

$$[U^*]_k = [u_{nk}^* \quad u_{sk}^* \quad w_k^* \quad -\theta_k^*]$$

$$[N^*]_k = [N_{nk}^* \quad N_{sk}^* \quad V_{nk}^* \quad -M_{nk}^*]$$

$$\{U\} = [u_n(s,t) \quad u_s(s,t) \quad w(s,t) \quad \theta(s,t)]^T$$

$$\{N\} = [N_n(s,t) \quad N_s(s,t) \quad V_n(s,t) \quad M_n(s,t)]^T$$

$$F_k^* = F_k^*(P,s)$$

T_k 代表角点的影响。扁壳的角点只对扁壳附近的区域有较大的影响，如果用一个非常小的圆弧代替角点，则对扁壳大部分区域的影响是非常小的。因此，对扁壳可以忽略角点的影响。

如果令 $X = Y = 0$，$Z = Z_0 - \rho\ddot{w}(Q,t)$，则式(7.120)便变为

$$C(P_0)u_k(P_0,t)=\int_{\Gamma}([U^*]_k\{N\}-[N^*]_k\{U\})d\Gamma$$

$$+T_k+\overline{f}_k+f_k \tag{7.121}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} f_k &= \int_{\Omega} w_k^*(P_0,Q)Z_0(Q,t)d\Omega \\ \overline{f}_k &= \int_{\Omega} \rho w_k^*(P_0,Q)\ddot{w}(Q,t)d\Omega \end{aligned}\right\} \tag{7.122a}$$

设 $\ddot{w}(Q,t)=\sum_{e=0}^{z}\ddot{\alpha}(t)q_e(Q)$

则 $$\overline{f}_k=\rho\int_{\Omega}w_k^*(P_0,Q)[q]d\Omega\{\ddot{\alpha}\} \tag{7.122b}$$

式中 $[q]=[q_0(Q) \quad q_1(Q) \cdots q_z(Q)]^T$

$\{\alpha\}=[\alpha_0(t) \quad \alpha_1(t) \cdots \alpha_z(t)]^T$

其中 $z=N_m$。式(7.122a)及式(7.122b)可以化为边界积分：

$$\left.\begin{aligned} f_k &= \int_{\Gamma} F_k(P_0,s,t)\cos\gamma d\Gamma \\ \overline{f}_k &= \left(\int_{\Gamma_m}\rho[\overline{F}]_k\cos\gamma d\Gamma\right)\{\ddot{\alpha}\} \end{aligned}\right\} \tag{7.122c}$$

由此可得：

$$\left.\begin{aligned} f_k &= \sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m} F_{km}(P_0,s,t)\cos\gamma d\Gamma \\ \overline{f}_k &= \sum_{m=1}^{M}\rho\int_{\Gamma}[\overline{F}]_{km}\cos\gamma d\Gamma\{\ddot{\alpha}\}_m \end{aligned}\right\} \tag{7.122d}$$

（三）样条边界元法

如果将扁壳的整个边界分为M个区域，又将每个边界区域分

为N_m等分(图7.4)，则式(7.121)可变为下列形式：

$$\sum_{m=1}^{M}([N_n]_m\{u_n\}_m+[N_s]_m\{u_s\}_m+[V_n]_m\{w\}_m+[M_n]_m\{\theta\}_m$$
$$-[U_n]_m\{N_n\}_m-[U_s]_m\{N_s\}_m-[W]_m\{V_n\}_m$$
$$+[\theta]_m\{M_n\}_m+[M]_m\{\ddot{w}\}_m=\{f\} \tag{7.123}$$

由上述可知，式(7.123)可以代表五种方法的计算格式(详见§5.4)：

1. 第一种方法

$[N_n]_m$，$[N_s]_m$，…，$[\theta]_m$由式(5.169)～式(5.175)确定(见第五章)。而$[M]_m$由下列公式确定：

$$[M]_m=[[M]_{1m}^T\quad [M]_{2m}^T\quad [M]_{3m}^T\quad [M]_{4m}^T]^T \tag{7.124a}$$

式中
$$[M]_{km}=\rho h_m[\overline{F}]_{km}([\lambda]_m\{\cos\gamma_i\})\otimes[E]_m \tag{7.124b}$$

$$[\overline{F}]_{km}=[\overline{F}(s_0)\quad \overline{F}(s_1)\quad \cdots\quad \overline{F}(s_s)]_{km}^T \tag{7.124c}$$

$$[\overline{F}(s_i)]=\begin{bmatrix}\overline{F}_0(s_0,s_i) & \overline{F}_1(s_0,s_i) & \cdots & \overline{F}_s(s_0,s_i)\\ \overline{F}_0(s_1,s_i) & \overline{F}_1(s_1,s_i) & \cdots & \overline{F}_s(s_1,s_i)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \overline{F}_0(s_N,s_i) & \overline{F}_1(s_N,s_i) & \cdots & \overline{F}_s(s_N,s_i)\end{bmatrix} \tag{7.124d}$$

由此可知：

$$[\overline{F}(s_i)]=[\overline{F}_{je}]=[\overline{F}_e(s_j,s_i)] \tag{7.124e}$$

2. 第二种方法

在式(7.123)中，用$\{a\}_m$，$\{b\}_m$，…，$\{D\}_m$代替$\{u_n\}_m$，$\{u_s\}_m$，…，$\{M_n\}_m$，用$[\widetilde{N}_n]_m$，$[\widetilde{N}_s]_m$，…，$[\widetilde{\theta}]_m$分别代替$[N_n]_m$，$[N_s]_m$，…，$[\theta]_m$，而且用式(5.179)～式(5.180)确

定；而$[\widetilde{M}]_m$由下列公式确定：

$$[\widetilde{M}]_m = [[\widetilde{M}]_{1m}^T \ [\widetilde{M}]_{2m}^T \ [\widetilde{M}]_{3m}^T \ [\widetilde{M}]_{4m}^T]^T$$

$$[\widetilde{M}]_{km} = [M]_{km}[N]_m$$

3. 第三种方法

$[N_n]_m$，$[N_s]_m$，…，$[\theta]_m$由式(5.215)～式(5.217)确定。而$[M]_{km}$由下列公式确定：

$$[M]_{km} = \rho[J]_{km}[E]_m \tag{7.124f}$$

式中 $[J]_{km} = \left[\int_{S_i}^{S_{i+1}} [\overline{F}(P_0, s)] \cos\gamma \, d\Gamma\right]$

4. 第四种方法

式中$[N_n]_m$，$[N_s]_m$，…，$[\theta]_m$的形式与式(5.215)和式(5.216)相同，但$[P_k^*]_m$由式(5.221)确定。而$[M]_{km}$利用式(7.124f)确定。

5. 第五种方法

在式(7.123)中，用$\{a\}_m$、$\{b\}_m$、…$\{D\}_m$分别代替$\{u_n\}_m$、$\{u_s\}_m$、…$\{M_n\}_m$。而$[N_n]_m$、$[N_s]_m$、…$[\theta]_m$利用式(5.215)、式(5.216)、式(5.221)和式(5.224)确定；$[M]_{km}$利用式(7.124f)确定。

式(7.123)与边界条件有关，引入边界条件后可变为

$$[A]\{\ddot{X}\} + [B]\{X\} = \{f\} \tag{7.125}$$

式(7.125)是一个常微分方程组，利用它可以求出扁壳的动力响应。$[A]$、$[B]$和$\{X\}$根据扁壳的边界条件确定，例如，对于周边自由的扁壳，则

$$\{X\}=[\{u_n\}^T \quad \{u_s\}^T \quad \{w\}^T \quad \{\theta\}^T]^T$$

$$\{A\}=[[0] \quad [0] \quad [M] \quad [0]]$$

$$[B]=[[N_n] \quad [N_s] \quad [V_n] \quad [M_n]]$$

（四）扁壳的自由振动

如果只考虑扁壳的自由振动，则 $Z_s=0$。如果令$\{X\}=\{X^*\}\sin\omega t$，则式(7.125)便变为

$$[A]\{X^*\}=\omega^2[B]\{X^*\} \tag{7.125a}$$

利用式(7.125a)可以确定扁壳的自振频率及相应的振型。

【例7.4】 已知四边固定圆柱薄壳的下列资料：$a=b=1$，$E=1$，$\mu=0.3$，$d=0.005$，$\rho=1$，利用样条边界元法求它的自振频。计算结果列在表7.2中。

表7.2　圆柱薄壳的自振频率

自振频率	样条边界元法	样条有限点法	有限条法
ω_1	0.103	0.103	0.103
ω_2	0.132	0.132	0.132
ω_3	0.145	0.146	0.144
ω_4	0.182	0.183	0.181
ω_5	0.205	0.205	0.205

§7.4　拉普拉斯变换法

瞬态振动问题是一个非定常的振动问题。对于非定常的弹性动力学问题，可以采用拉普拉斯变换法。

（一）Laplace变换

函数$f(t)$的Laplace变换定义为

$$F(z)=L[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt \tag{7.126}$$

式中$f(t)$为仅有限个连续点的分段可微函数，当$t<0$时，$f(t)=0$；z为复数；利用分部积分法可得：

$$\left.\begin{aligned} L[\dot{f}]&=zF(z)-f(0)\\ L[\ddot{f}]&=z^2F(z)-zf(0)-\dot{f}(0)\end{aligned}\right\} \tag{7.127}$$

拉普拉斯逆变换定义为

$$f(t)=L^{-1}[F(z)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}F(z)e^{zt}dz \tag{7.128}$$

（二）基本方程的变换

式(7.2)所示的弹性动力学平衡方程可写成下列形式：

$$(c_1^2-c_2^2)u_{j,ji}+c_2^2u_{i,jj}+\frac{1}{\rho}b_i=\ddot{u}_i \tag{7.129}$$

式中c_1为压缩波的波速，c_2为剪切波的波速，即

$$c_1^2=\frac{A+G}{\rho}\qquad c_2^2=\frac{G}{\rho} \tag{7.130}$$

域内任一点的应力公式为

$$\sigma_{ij}=\rho[(c_1^2-2c_2^2)u_{k,k}\delta_{ij}+c_2^2(u_{i,j}+u_{j,i})] \tag{7.131}$$

利用拉普拉斯变换法，式(7.129)及式(7.131)可变为

$$(c_1^2-c_2^2)U_{j,ji}+c_2^2U_{i,jj}-z^2U_i+X_i/\rho=0 \tag{7.132}$$

$$\overline{\sigma}_{ij}=AU_{k,k}\delta_{ij}+G(U_{i,j}+U_{j,i}) \tag{7.133}$$

式中 $$X_i=\rho(B_i+\dot{u}_{i0}+zu_{i0}) \tag{7.134}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
U_i(Q,z)=L[u_i(Q,t)] \\
B_i(Q,z)=L[b_i(Q,t)]
\end{array}\right\} \tag{7.135}
$$

边界条件为

$$
\left.\begin{array}{ll}
U_i(Q,z)=\overline{U}_i(Q,z)=L[\overline{u}_i(Q,t)] & Q\in\Gamma_u \\
\overline{P_i}(Q,z)=\overline{P_i}(Q,z)=L[\overline{p_i}(Q,t)] & Q\in\Gamma_p
\end{array}\right\} \tag{7.136}
$$

（三）边界积分方程

式(7.132)可变为下列边界积分方程：

$$
C_{kl}(P)U_l(P,z)+\int_\Gamma [P^*_{kl}(P,Q_0,z)U_l(Q_0,z)d\Gamma
$$

$$
=\int_\Gamma U^*_{kl}(P,Q_0,z)P_l(Q_0,z)d\Gamma
$$

$$
+\int_\Omega U^*_{kl}(P,Q,z)X_l(Q,z)d\Omega \tag{7.137}
$$

式中U^*_{kl}为基本解，满足下列方程：

$$
\frac{G}{1-\mu}U^*_{kj,ji}+GU^*_{ki,ij}-z^2U_{ki}+\delta_{ki}\delta(P,Q)=0 \tag{7.138}
$$

由式(7.138)可得：

$$
U^*_{kl}(P,Q,z)=\frac{1}{\alpha\pi\rho c_2^2}\left(\psi\delta_{kl}-x\frac{r_kr_l}{r^2}\right) \tag{7.139}
$$

式中 $r=\overline{PQ}=r(P,Q)$，$r_k=x_k(P)-x_k(Q)$

对于二维问题($\alpha=2$)，则

$$
\left.\begin{array}{l}
\psi(r,z)=K_0\left(\frac{zr}{c_2}\right)+\frac{c_2}{zr}\left[K_1\left(\frac{zr}{c_2}\right)-\frac{c_2}{c_1}K_1\left(\frac{zr}{c_1}\right)\right] \\
x(r,z)=K_2\left(\frac{zr}{c_2}\right)-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2K_2\left(\frac{zr}{c_1}\right)
\end{array}\right\} \tag{7.140}
$$

式中K_l为l阶贝塞尔函数。

对三维问题($\alpha=4$)，则

$$\left.\begin{aligned}\psi(r,z)r&=A_2(1+B_2)-A_1B_1c_2^2/c_1^2\\ \chi(r,z)r&=A_2(1+3B_2)-A_1(1+3B_1)c_1^2/c_1^2\end{aligned}\right\}\tag{7.141}$$

式中
$$\left.\begin{aligned}&A_1=e^{-zr/c_1}\quad A_2=e^{-zr/c_2}\\ &B_1=\left(\frac{c_1}{zr}\right)^2+\frac{c_1}{zr},\ B_2=\left(\frac{c_2}{zr}\right)^2+\frac{c_2}{zr}\end{aligned}\right\}\tag{7.142}$$

另外，P^*_{kl}由下列公式确定：

$$P^*_{kl}(P,Q,z)=AU^*_{kl,j}n_i+G(U_{ki,j}+U_{kj,i})n_j\tag{7.143}$$

式中 $U^*_{kl}=U^*_{kl}(P,Q,z)$

将式(7.137)的内点公式代入式(7.133)便得：

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_{ij}(P,z)=&\int_\Gamma[\overline{D}_{kij}(P,Q_0,z)P_k(Q_0,z)\\ &-\overline{S}_{kij}(P,Q_0,z)U_k(Q_0,z)]d\Gamma\\ &+\int_\Omega\overline{D}_{kij}(P,Q_0,z)X_k(Q,z)d\Omega\end{aligned}\tag{7.144}$$

式中
$$\left.\begin{aligned}\overline{D}_{kij}&=A\delta_{ij}U^*_{mk,m}+G(U^*_{ik,j}+U^*_{jk,i})\\ \overline{S}_{kij}&=A\delta_{ij}P^*_{mk,m}+G(P^*_{ik,j}+P^*_{jk,i})\end{aligned}\right\}\tag{7.145}$$

式中求导数是对P点进行的。

（四）计算方法

利用样条边界元法可以建立式(7.137)和式(7.144)的计算格式。利用这些计算格式可求出$U_i(P,z)$及$\sigma_{ij}(P,z)$。当U_i及σ_{ij}确定后，利用拉普拉斯数值逆变换可求出$u_i(P,t)$及$\sigma_{ij}(P,t)$的值。

设 $u(P,t)=\sum_{p=1}^{H} a_{ip} exp(b_p t) \quad \forall P \in \Omega \cup \Gamma$ (7.146)

式中 $a_{ip}=a_{ip}(P) \quad b_p=b_p(b)$

为了确定系数a_{ip}及b_p，可先对式(7.146)作拉普拉斯变换。因为

$$L[exp(b_p t]=1/(z-b_p) \tag{7.147}$$

则式(7.146)便变为

$$U_i(P,z)=\sum_{p=1}^{H}\frac{a_{ip}}{z+b_p} \tag{7.148}$$

若取H个z值(z_1, z_2, …, z_H)，并令$b_p=z_p$，则式(7.148)对每个P点都有H个待定系数a_{ip}，即

$$U_i(P,z)=\sum_{p=1}^{H}\frac{a_{ip}}{z_k+z_p} \qquad k=1, 2, \cdots, H \tag{7.149}$$

由于$U_i(P,z_k)$我们已求得，因此对每个P点，式(7.149)代表一个H阶的方程组，由此可求出a_{ip}值。当$a_{ip}(p=1,2,\cdots,H)$确定后，则利用式(7.146)即可得到$u_i(P,t)$。

$\sigma_{ij}(P,t)$及$p_i(P,t)$的求法与$u_i(P,t)$的求法完全类似，可以仿照进行求解。

§7.5 傅里叶变换法

稳定振动问题是一个定常的振动问题。对于定常的弹性动力问题，可以采用傅里叶变换法。

(一)Fourier变换

函数$f(t)$的傅里叶变换定义为

$$G(\omega)=F[f(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{7.150}$$

它的性质为

$$\left.\begin{aligned} F[\dot{f}] &= i\omega F(\omega) \\ F[\ddot{f}] &= -\omega^2 F(\omega) \end{aligned}\right\} \tag{7.151}$$

式中 i 为复数。

傅里叶逆变换定义为

$$f(t)=F[G(\omega)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega t}dt \tag{7.152}$$

利用傅里叶变换法，式(7.129)可变为

$$(c_1^2-c_2^2)U_{j,ji}+c_2^2U_{i,jj}+\omega^2U_i+B_i/\rho=0 \tag{7.153}$$

式中 $U_i(Q,\omega)=F[u_i(Q,t)]$，$B_i(Q,\omega)=F[b_i(Q,t)]$ (7.154)

变换后的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} U_i(Q,\omega) &= \overline{U}_i(Q,\omega) \qquad Q\in\Gamma_u \\ P_i(Q,\omega) &= \overline{P}_i(Q,\omega) \qquad Q\in\Gamma_p \end{aligned}\right\} \tag{7.155}$$

由式(7.153)与式(7.132)比较可知，若令 $z=-i\omega$，并略去 u_{i0} 及 $\dot{u}_{i0}$，则这两个式在形式上完全一样，因此，基本解表达式(7.138)至式(7.143)仍然有效，只须令 $z=-i\omega$ 就行了。上述各式中的 ω 为激励频率。

（二）边界积分方程

式(7.153)可变换为下列边界积分方程：

$$C_{ki}(P)U_i(P,\omega)+\int_{\Gamma}[P_{ki}^*(P,Q_0,\omega)U_i(Q_0,\omega)d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma} U_{kl}^{*}(P,Q_0,\omega)P_l(Q_0,\omega)d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega} U_{kl}^{*}(P,Q_0,\omega)b_l(Q,\omega)d\Omega \qquad (7.156)$$

变换后的应力表达式为

$$\overline{\sigma_{ij}} = \int_{\Gamma} [\overline{D}_{kij}P_k - \overline{S}_{kij}U_k]d\Gamma + \int_{\Omega} \overline{D}_{kij}B_i d\Omega \qquad (7.157)$$

式中$\overline{D}_{kij}$及$\overline{S}_{kij}$的形式与式(7.145)相同。

（三）计算方法

利用样条边界元法可以建立式(7.156)和式(7.157)的计算格式，利用这些计算格式可求出$U_i(P,\omega_k)$及$\sigma_{ij}(P,\omega_k)$，具体做法与第四章相同。当$U_i(P,\omega_k)$及$\sigma_{ij}(P,\omega_k)$确定后，利用傅里叶数值逆变换可求出$u_i(P,t)$及$\sigma_{ij}(P,t)$的值。

参考文献

[1]秦荣，弹性动力问题的样条边界元法，广西大学，1984年。

[2]秦荣，板壳振动的样条边界元法，全国第一届工程中的边界元法会议论文集，1985年。

[3]Qin Rong(秦荣), Spline Boundary Element Method for Vibration and Stability of Thin Shell, 第七届国际边界元法学术会议论文，意大利，1985年。

[4]Qin Rong(秦荣), Spline Boundary Element Method for Vibration of Shallow Shell, 保伽利亚全国第五次理论与应用力学学术会议文集，1985年。

[5]D.Nardini, C.A.Brebbia, Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Metnod, 第五届国际边界元法会议论文集，日本1983年。

[6]秦荣，求解动力反应的样条函数方法，《工程力学》，2(1985)。

[7]Qin Rong(秦荣), Qin Jun(秦俊),Splin Function Method for Dynamic Response, 第一次世界计算力学大会论文集，1986年，美国。

[8]田中正隆，田中喜久昭，境界要素法——基础及应用(日文)，丸善株式会社，1982年。

[9]C.A.Brebbia, J.C.F Telles, L.C.Wrobel, Boundary Element Techniques, 英国，1984。

第八章　几何非线性问题样条边界元法

固体力学非线性问题一般分三类：（1）几何非线性问题；（2）材料非线性问题；（3）混合问题，既含几何非线性又含材料非线性问题。实际上，工程中的问题都属于非线性问题，为了简化计算，往往按线性问题处理。但是，有许多问题，用线性理论是不适合的，必须用非线性理论解决。因此，研究固体力学非线性问题的计算方法是一个重要课题。

几何非线性问题指的是大位移问题，一般来说，控制微分方程和边界条件是非线性的，但应力与应变的关系是线性的，例如，薄板及薄壳的大挠度问题都属于几何非线性问题。本章主要以弹性薄板大挠度问题为例来介绍几何非线性问题的样条边界元法。计算结果表明，利用样条边界元法计算弹性薄板大挠度问题是一个经济有效的方法，比有限元法及有限条法优越。

§8.1　基本方程

热弹性薄板大挠度问题的基本微分方程为

$$D\nabla^4 w - d\sigma_{ij}w_{,ij} = q + \nabla^2 M_T \tag{8.1}$$

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad i,j = 1,2 \tag{8.2}$$

式中d为薄板的厚度，w为薄板弯曲的挠度，σ_{ij}为薄板平面应力问题的应力分量。应力与应变有下列关系：

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \Theta T\delta_{ij} \tag{8.3}$$

式中 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+w_{,i}w_{,j})$ (8.4)

如果薄板是各向同性的弹性体，则式(8.3)变为

$$\sigma_{ij}=A\delta_{ij}(u_{k,k}+\frac{1}{2}w_{,k}w_{,k})+G(u_{i,j}+u_{j,i}+w_{,i}w_{,j})$$

$$-\delta_{ij}\Theta T \qquad i,j,k=1,2 \tag{8.5}$$

式中 $A=2\mu G/(1-\mu)$, $\Theta=E\alpha/(1-\mu)$

弯曲内力与挠度有下列关系：

$$M_{ij}=-D[w_{,ij}+\mu(w_{,kk}\delta_{ij}-w_{,ij})]+M_T\delta_{ij} \tag{8.6}$$

$$M_n=M_{ij}n_in_j,\quad M_{nt}=M_{ij}n_it_j \tag{8.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&V_n=V_in_i\\&V_i=-D[w_{,iii}-(2-\mu)(w_{,ikk}-w_{,iii})+M_{T,i}\end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

式中 $n_i=\cos(n,x_i)$, $t_j=\cos(t,x_j)$

$$\left.\begin{aligned}&M_T=\Theta\int_{-d/2}^{d/2}\tau(x_1,x_2,z)zdz\\&T=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\tau(x_1,x_2,z)dz\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

式中 τ为温度变化；μ为泊松系数。

边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&u_i=\overline{u}_i,\quad w=\overline{w},\quad w_{,n}=\overline{w}_{,n}\\&p_i=\overline{p}_i,\quad V_n=\overline{V}_n,\quad M_n=\overline{M}_n\end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

上述方程是薄板大挠度问题的基本方程。如果忽略二次项 $w_{,i}w_{,j}$，则上述各式便变为薄板小挠度问题的基本方程。

§8.2 薄板大挠度问题样条边界元法

（一）边界积分方程

式(8.1)及式(8.2)可以写成下列形式：

$$D\nabla^4 w=\overline{q}+\nabla^2 M_T \tag{8.11}$$

$$\sigma_{ij,j}=0 \qquad i,j=1,2 \tag{8.12}$$

式中 $\overline{q}=q+d\sigma_{ij}w,_{ij}$ (8.13)

式(8.11)及其边界条件可以化为下列边界积分方程：

$$C(P)w_k(P)=\int_\Gamma[w_k^*(P,Q_0)V_n(Q_0)-\theta_k^*(P,Q_0)M_n(Q_0)$$

$$-V_{nk}^*(P,Q_0)w(Q_0)+M_{nk}^*(P,Q_0)\theta(Q_0)]d\Gamma(Q_0)$$

$$+T_k+\int_\Omega[\overline{q}(Q)w_k^*(P,Q)$$

$$+M_T(Q)\ \nabla^2 w_k^*(P,Q)]d\Omega(Q) \tag{8.14}$$

式中 $k=1,2,\ w_1=w,\ w_2=\theta$

$$w_1^*=\frac{1}{8\pi D}r^2\ln r$$

其余记号与第五章相同。

式(8.12)及其边界条件可化为下列边界积分方程：

$$C_{kl}(P)u_l(P)=\int_\Gamma[u_{kl}^*(P,Q_0)p_l(Q_0)$$

$$-p_{kl}^*(P,Q_0)u_l(Q_0)]\,d\Gamma$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sigma^{*}_{klm}(P,Q)w_{,l}(Q)w_{,m}(Q)d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}u^{*}_{kl,l}(P,Q)\Theta T(Q)d\Omega \quad k,l,m=1,2 \tag{8.15}$$

内点的应力公式为

$$\sigma_{ij}(P)=\int_{\Gamma}[D_{kij}(P,Q_0)p_k(Q_0)$$

$$-S_{kij}(P,Q_0)u_k(Q_0))]d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma}D_{kij}(P,Q_0)n_k(Q_0)\Theta T(Q_0)d\Gamma$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}[T_{klij}(P,Q)w_{,k}(Q)w_{,l}(Q)$$

$$+D_{kij}(P,Q)\Theta T_{,k}(Q)]d\Omega$$

$$+\frac{G}{2(1-\mu)}[(1-\mu)w_{,i}(P)w_{,j}(P)$$

$$+\mu w_{,k}(P)w_{,k}(P)\delta_{ij}]-\delta_{ij}\Theta T \quad i,j,k,l=1,2 \tag{8.16}$$

式中 $\sigma^{*}_{kij}=D_{kij} \qquad \sigma^{*}_{klm}=D_{klm}$ (8.17)

$$T_{klij}=\frac{G}{2\pi(1-\mu')r^2}[8r_ir_jr_kr_l/r^4+(1-4\mu')\delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$-(1-2\mu')(2\delta_{ij}r_kr_l/r^2+2\delta_{kl}r_ir_j/r^2+\delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$+\delta_{il}\delta_{jk})-2\mu'(\delta_{ik}r_jr_l+\delta_{jk}r_ir_l+\delta_{il}r_jr_k$$

$$+\delta_{jl}r_ir_k)/r^2] \tag{8.18}$$

$$\mu'=\mu/(1+\mu)$$

其余记号与第四章及第六章相同。但要注意，本章属于平面应力问题，对于第四章的 u^{*}_{kl}、p^{*}_{kl}、D_{kij}及S_{kij}，必须将其中的μ

用μ'代替后才能在本章中应用。

由上述可知，薄板大挠度问题的求解可归结为式(8.14)及式(8.15)所示的边界积分方程的求解。这些边界积分方程是非线性的，可以利用迭代法求解，先假定一个等效荷载$\bar{q}$，利用式(8.14)求出w值，利用式(8.15)求出u_i值，然后求出$w_{,ij}$及σ_{ij}值，利用式(8.13)可得$\bar{q}$值，这些是第一次近似值。将$\bar{q}$的第一次近似值代入式(8.14)求出w的第二次近似值，然后利用式(8.15)求出u_i的第二次近似值，利用式(8.13)求出$\bar{q}$的第二次近似值。这样反复迭代几次，可得w、u_i、M_{ij}及σ_{ij}逼近精确解的值。

（二）样条边界元法

如果将薄板整个边界分为M个区域，又将每个区域分为N_m个等分，则式(8.14)及式(8.15)便变为下列形式：

$$[D]_k\{w\}-[M]_k\{\theta\}-[H]_k\{V\}+[K]_k\{M\}-[T]_k\{c\}$$

$$=\{F\}_k^1+\{F\}_k^2 \qquad k=1,2,3 \tag{8.19}$$

$$[H]\{u\}-[K]\{p\}=\{f\}^1+\{f\}^2 \tag{8.20}$$

式中
$$\{F\}_k^1=\{F\}_k^q+\{F\}_k^r \tag{8.21}$$

$$\{f\}^r=[(\{f\}_1^r)^T \quad (\{f\}_2^r)^T]^T \tag{8.22}$$

$$\{F\}_k^r=[F_k^r(s_0) \quad F_k^r(s_1) \cdots F_k^r(s_N)]^T \tag{8.23}$$

$$\{f\}_k^r=\{f_k^r(s_0) \quad f_k^r(s_1) \cdots f_k^r(s_N)]^T \tag{8.24}$$

其中
$$F_k^q(s_j)=\int_\Omega w_k^*(s_j,Q)q(Q)d\Omega \tag{8.25}$$

$$F_k^T(s_j) = \int_\Omega M_T(Q)\nabla^2 w_k^*(s_j,Q)d\Omega \tag{8.26}$$

$$F_k^2(s_j) = d\int_\Omega w_k^*(s_j,Q)\sigma_{lm}(Q)w_{,lm}(Q)d\Omega \tag{8.27}$$

$$f_k^1(s_j) = \int_\Omega u_{kl,l}^*(s_j,Q)\Theta T(Q)d\Omega \tag{8.28}$$

$$f_k^2(s_j) = -\frac{1}{2}\int_\Omega D_{klm}(s_j,Q)w_{,l}(Q)w_{,m}(Q)d\Omega \tag{8.29}$$

其余记号与第六章相同。

式(8.25)～式(8.29)可以按下列办法处理：先将区域Ω分为有限个单元，然后利用高斯求积公式进行计算。由第六章可知，式(8.19)和式(8.20)可以代表五种方法的计算格式，详见第六章。由式(8.19)可得：

$$[\widetilde{D}]\{w\}-[\widetilde{M}]\{\theta\}-[\widetilde{H}]\{V\}+[\widetilde{K}]\{M\}-[T]\{c\}$$

$$=\{F\}^1+\{F\}^2 \tag{8.30}$$

式中 $[\widetilde{P}]=[[P]_1^T \quad [P]_2^T \quad [P]_3^T]^T \qquad (8.31)$

$$\{F\}=[\{F\}_1^T \quad \{F\}_2^T \quad \{F\}_3^T]^T \tag{8.32}$$

式中 $P=D,M,H,K \qquad (8.33)$

式(8.20)和式(8.30)等号左边与线性问题对应的项相同，等号右边第一项是已知项，第二项是与非线性算子对应的项。

式(8.20)和式(8.30)与边界条件及角点条件有关。当引入边界条件及角点条件后，则式(8.30)和式(8.20)可分别变为下列形式：

$$[A]\{X\}=\{F\}+\{F\}^2 \tag{8.34}$$

$$[G]\{Z\}=\{f\}+\{f\}^2 \tag{8.35}$$

式中左边对应的项与线性问题相同，右边第一项是已知项，第二

项是与非线性算子对应的项。由上述可知，可以利用迭代法求解式(8.34)和式(8.35)。式中$\{F\}$及$\{f\}$与边界条件及角点条件有关。

(三)迭代法

利用迭代法求解式(8.34)和式(8.35)时，可以按下列步骤进行计算：(1)先假设$\{F\}^2=\{0\}$，利用式(8.34)求出边界未知量$\{X\}$的第一次近似值，然后以此为基础求出Ω域内的w、$w_{,k}$和$w_{,kl}$的第一次近似值；(2)利用式(8.29)确定$\{f\}^2$的第一次近似值，然后利用式(8.35)求出边界未知量$\{Z\}$的第一次近似值，以此为基础求出Ω域内的σ_{ij}的第一次近似值；(3)利用式(8.27)确定$\{F\}^2$的第一次近似值；(4)利用式(8.34)求出边界未知量$\{X\}$的第二次近似值。重复上述运算，直到各结点处的误差$|U_n-U_{n-1}|$收敛至允许范围为止(n为迭代次数)，可得w，u_i，M_{ij}及σ_{ij}逼近精确解的值。

由上述可知，这种迭代法在迭代过程中，方程组的系数矩阵$[A]$、$[G]$及向量$\{F\}$、$\{f\}$不变，只修改$\{F\}^2$和$\{f\}^2$就行了。因为$\{F\}^2$和$\{f\}^2$是同非线性项对应的区域积分，因此，如何很好地处理这一区域积分，是建立非线性问题有效计算方法的关键。

§8.3 摄动——样条边界元法

本节以弹性薄板大挠度问题为例，不考虑温度变化的影响，这是一个几何非线性问题。求解几何非线性问题是一个复杂问题，为了简化计算，国内外做过许多研究，我们在这些研究的基础上，将摄动法与样条边界元法结合起来，提出一个摄动——样条边界元法。

（一）基本方程

在摄动法中，首先使微分方程及边界条件无因次化；其次选择一个无因次的量作为摄动参数，将微分方程及边界条件中的各个量展开为这个参数的幂级数；然后逐步摄动，求出近似解[2]。

设$T = M_T = 0$，将式(8.3)代入式(8.1)和式(8.2)便得：

$$\left.\begin{aligned} &L_x(u,v,w)=0,\ L_y(u,v,w)=0 \\ &L_z(u,v,w)=q \end{aligned}\right\} \tag{8.36}$$

式中
$$\begin{aligned} L_x &= u_{,xx}+\gamma_1 u_{,yy}+\gamma_2 v_{,xy}+w_{,x}(w_{,xx}+\gamma_1 w_{,yy}) \\ &\quad +\gamma_2 w_{,y}w_{,xy} \\ L_y &= v_{,yy}+\gamma_1 v_{,xx}+\gamma_2 u_{,xy}+w_{,y}(w_{,yy}+\gamma_1 w_{,xx}) \\ &\quad +\gamma_2 w_{,x}w_{,xy} \\ L_z &= D\nabla^4 w - B[w_{,xx}(v_{,x}+\mu v_{,y})+w_{,yy}(v_{,y}+\mu u_{,x}) \\ &\quad +(1-\mu)w_{,xy}(u_{,y}+v_{,x})+\frac{1}{2}w_{,xx}(w^2_{,x} \\ &\quad +\mu w^2_{,y})+\frac{1}{2}w_{,yy}(w^2_{,y}+\mu w^2_{,x}) \\ &\quad +(1-\mu)w_{,x}w_{,y}w_{,xy}] \end{aligned} \tag{8.37}$$

式中
$$\left.\begin{aligned} &B=Ed/(1-\mu^2),\ D=Bd^2/12 \\ &\gamma_1=(1-\mu)/2,\ \gamma_2=(1+\mu)/2 \end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

如果我们引入无因次量将式(8.36)无因次化，便得：

$$\left.\begin{aligned} &U_{,XX}+\gamma_1 U_{,YY}+\gamma_2 V_{,XY}+W_{,X}(W_{,XX} \\ &\quad +\gamma_1 W_{,YY})+\gamma_2 W_{,Y}W_{,XY}=0 \\ &V_{,YY}+\gamma_1 V_{,XX}+\gamma_2 U_{,XY}+W_{,Y}(W_{,YY} \\ &\quad +\gamma_1 W_{,XX})+\gamma_2 W_{,X}W_{,XY}=0 \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

$$\nabla^4 W = \overline{Q} + L(U, V, W) \tag{8.40}$$

式中 $L(U,V,W) = 12[W_{,XX}(U_{,X} + \mu V_{,Y}) + W_{,YY}(V_{,Y}$

$+ \mu U_{,X}) + (1-\mu)W_{,XY}(U_{,Y} + V_{,X}) + \frac{1}{2}W_{,XX}(W^2_{,X}$

$+ \mu W^2_{,Y}) + \frac{1}{2}W_{,YY}(W^2_{,Y} + \mu W^2_{,X})$

$$+ (1-\mu)W_{,X}W_{,Y}W_{,XY}] \tag{8.41}$$

$$\left.\begin{aligned} &X = x/a, \quad Y = y/a, \quad U = au/d^2, \quad V = av/d^2 \\ &W = w/d, \quad \overline{Q} = qa^4/Dd \end{aligned}\right\} \tag{8.42}$$

式中 a 是薄板的一个几何尺寸。

设w_0为薄板的最大挠度，并引用摄动参数

$$W_m = w_0/d \tag{8.43}$$

则 $\overline{Q} = \alpha_1 W_m + \alpha_3 W_m^3 + \alpha_5 W_m^5 + \cdots$

$$\begin{aligned} &U = U_2(Q)W_m^2 + U_4(Q)W_m^4 + \cdots \\ &V = V_2(Q)W_m^2 + V_4(Q)W_m^4 + \cdots \\ &W = W_1(Q)W_m + W_3(Q)W_m^3 + \cdots \end{aligned} \tag{8.44}$$

式中Q为Ω域内任一点，$Q = Q(X, Y)$。将式(8.44)代入式(8.39)和式(8.40)便得：

$$\nabla^4 W_r = q_r \qquad r = 1,3,5\cdots \tag{8.45}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2G}{1-\mu}(U_{r,XX} + \gamma_1 U_{r,YY} + \gamma_2 V_{r,XY}) + P_{rX} = 0 \\ &\frac{2G}{1-\mu}(V_{r,YY} + \gamma_1 V_{r,XX} + \gamma_2 U_{r,XY}) + P_{rY} = 0 \end{aligned}\right. \quad r = 2,4\cdots \tag{8.46}$$

式中
$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 \\ q_3 &= \alpha_3 + L(U_2, V_2, W_1) \\ q_5 &= \alpha_5 + L(U_4, V_4, W_3) \\ q_r &= \alpha_r + L(U_{r-1}, V_{r-1}, W_{r-2}) \end{aligned}\right\} \tag{8.47}$$

$$\begin{aligned} P_{rX} &= \frac{2G}{1-\mu}[W_{r-1,X}(W_{r-1,XX} + \gamma_1 W_{r-1,YY}) \\ &\quad + \gamma_2 W_{r-1,Y} W_{r-1,XY}] \\ P_{rY} &= \frac{2G}{1-\mu}[W_{r-1,Y}(W_{r-1,YY} + \gamma_1 W_{r-1,XX}) \\ &\quad + \gamma_2 W_{r-1,X} W_{r-1,XY}] \end{aligned} \tag{8.48}$$

式中$L(U_{r-1}, V_{r-1}, W_{r-2})$由式(8.41)决定。

由上述可知，如果q_r当做等效荷载，P_{rX}及P_{rY}当做等效体力，则式(8.45)便是薄板小挠度问题的微分方程，式(8.46)便是平面应力问题的线性微分方程。因此，通过摄动法，可以把几何非线性问题化为线性问题来分析。

（二）摄动—样条边界元法

如果设$\widetilde{u}_1 = U_r$、$\widetilde{u}_2 = V_r$、$\widetilde{w}_1 = W_r = \widetilde{w}$及$\widetilde{w}_2 = \widetilde{\theta} = \partial W_r/\partial n$，则式(8.45)和式(8.46)可以化为下列边界积分方程：

$$\begin{aligned} C(P)\widetilde{w}_k(P) &= \int_\Gamma [w_k^*(P,s)\widetilde{V}_n(s) - \theta_k^*(P,s)\widetilde{M}_n \\ &\quad - V_{nk}^*(P,s)\widetilde{w}(s) + M_{nk}^*(P,s)\widetilde{\theta}(s)]d\Gamma(s) \\ &\quad + \int_\Omega w_k^*(P,Q)\widetilde{q}(Q)d\Omega \end{aligned} \tag{8.49}$$

$$C_{kl}(P)\widetilde{u}_k(P) = \int_\Gamma [u_{kl}^*(P,s)\widetilde{p}_l(s) - p_{kl}^*(P,s)\widetilde{u}_l(s)]d\Gamma$$

$$+\int_{\Omega} u_{ki}^{*}(P,Q)b_i(Q)d\Omega \tag{8.50}$$

式中 $w_1^* = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r$ (8.51)

其余记号与第五章相同。

如果将整个边界Γ分为M个部分，又将每一个边界区域分为N_m等分，则式(8.49)及式(8.50)可以离散为下列形式：

$$[\widetilde{D}]\{\widetilde{w}\} - [\widetilde{M}]\{\widetilde{\theta}\} - [\widetilde{H}]\{\widetilde{V}\} + [\widetilde{K}]\{\widetilde{M}\} - [T]\{c\} = \{F\} \tag{8.52}$$

$$[H]\{\widetilde{u}\} - [K]\{\widetilde{p}\} = \{f\} \tag{8.53}$$

式(8.52)和式(8.53)是线性的，它可以代表五种方法的计算格式，见第六章。如果边界未知量采用下列形式：

$$U(s) = [\varphi_{3e}(s)][Q]\{S\} \tag{8.54}$$

则 $\{U\}_m = [N]_m\{S\}$ (8.55)

另外注意：

$$\sum_{i=0}^{z}\int_{\Gamma_m} L(P,s)d\Gamma = \sum_{i=0}^{z-1}\int_{S_i}^{S_{i+1}} L(P,s)d\Gamma \tag{8.56}$$

式中 $z = N_m$

式(8.52)和式(8.53)与边界条件及角点条件有关，引入边界条件及角点条件后可得：

$$[A]\{X\} = \{P\} \tag{8.57}$$

$$[G]\{Z\} = \{q\} \tag{8.85}$$

由上述可知，摄动——样条边界元法的计算步骤如下：

(1) 利用摄动法将非线性微分方程组化为线性微分方程组，

见式(8.45)和式(8.46)。

(2) 假设q_r和P_r分别为等效荷载及等效体力，建立边界积分方程，见式(8.49)和式(8.50)。

(3) 将整个边界Γ分为M个区域，又将每个边界区域分为N_m等分，使式(8.49)和式(8.50)变为线性代数方程组，见式(8.57)和式(8.58)。

(4) 利用式(8.57)求边界未知量X_1。当X_1确定后，利用式(8.49)的离散格式即可求出区域Ω内的W_1。

(5) 利用式(8.48)求出P_{2X}及P_{2Y}后，即可利用式(8.58)求边界未知量Z_2。当Z_2确定后，利用式(8.50)的离散格式即可求出区域Ω内的U_2及V_2。

(6) 利用式(8.41)求出$L(U_2, V_2, W_1)$后，即可利用式(8.57)求薄板在q_3作用下的边界边未知量X_3。当X_3确定后，利用式(8.49)的离散格式即可求出区域Ω内的W_3。

(7) 重复(4)至(6)的运算可求出U_4、V_4、W_5……

(8) 利用式(8.44)求薄板大挠度问题的位移u、v及w。

(9) 求薄板的内力：

$$\left.\begin{aligned}
N_x &= B\left[u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \mu\left(v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2\right)\right] \\
N_y &= B\left[v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + \mu\left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2\right)\right] \\
N_{xy} &= \frac{1}{2}(1-\mu)B(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y})
\end{aligned}\right\} \tag{8.59}$$

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= -D(w_{,xx} + \mu w_{,yy}) \\
M_y &= -D(w_{,yy} + \mu w_{,xx}) \\
M_{xy} &= -(1-\mu)Dw_{,xy}
\end{aligned}\right\} \tag{8.60}$$

（三）区域积分的积分方法

在非线性问题中，区域积分可以采用下列方法处理：先沿一个坐标轴进行解析的积分，然后沿另一个坐标轴进行数值积分。这个方法对非线性问题区域积分的计算是一个有效的方法，见第二章。

§8.4 计算例题

【例8.1】 图8.1是一个周边简支的薄板，利用样条边界元法求它的大挠度问题。

本例将整个边界分为4个区域，每个边界区域分为10等分。利用样条边界元法及摄动——样条边界元法算出的结果如图8.1所示。它们与最小二乘配点法的结果非常接近[5]。

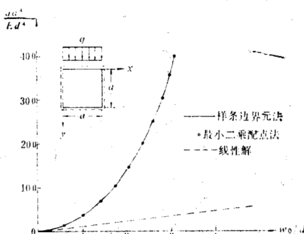


图8.1

【例8.2】 图8.2是一个周边固定的圆板，受均布荷载作用，利用样条边界元法求解它的大挠度问题。

本例对圆板整个周边分为20等分，即$N=20$，所得结果为

$$qa^4/64D=\left[1+0.546\left(\frac{w_0}{d}\right)^2\right]w_0 \tag{8.61}$$

$$N_r/d=0.4771Ed^2/a \tag{8.62}$$

文献[2]用伽辽金变分法所得的结果为

$$
\left.\begin{aligned}
qa^4/64D &= \left[1 + 0.544\left(\frac{w_0}{d}\right)^2\right]w_0 \\
N_r/d &= 0.4762Ed^2/a
\end{aligned}\right\} \quad (8.63)
$$

式中 a 为圆板的半径。

本例计算得到的最大挠度w_0与荷载q的关系图见图8.2，它与伽辽金变分法的结果非常接近。圆板在均布荷载作用下是一个轴对称问题，可以取圆板的四分之一进行计算。如果利用对称关系调整边界积分方程，则在圆板四分之一的边界上分5等分就行了，所得结果与式(8.63)很接近，见图8.2。

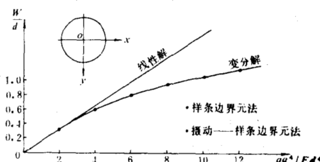


图8.2

【例8.3】 图8.3是一个受均布荷载作用的椭圆板，周边固定，利用样条边界元法求它的大挠度问题。设 a 及 b 分别为椭圆的半长轴及半短轴。

本例对椭圆板整个边界Γ分为20等分，所得结果为

$$q = D(24/a^4 + 16/a^2b^2 + 24/b^4)w_0 + 17.64Dw_0^3/b^4d \quad (8.64)$$

这个结果与文献[4]很接近，见图8.3。

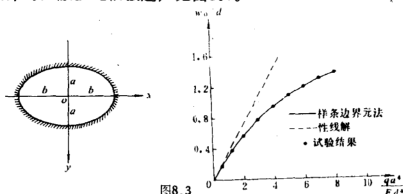


图8.3

【例8.4】 图8.4是一个受线性分布荷载的半圆板，利用样条边界元法求它的大挠度问题。

本例将整个边界Γ分为两个区域，每个区域分为10等分，所得结果为

$$\sqrt{5}q_0a^4/1500D=\left[1+0.48\left(\frac{w_0}{d}\right)^2\right]w_0 \tag{8.65}$$

这个结果与文献[4]很接近（见图8.4）。式中a为板的半径。

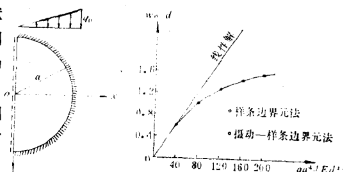


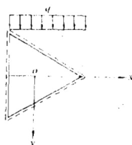
图8.4

【例8.5】 图8.5是一个受均布荷载的三角形板，周边简支，求它的大挠度问题。

本例将整个周边分为三个区域，每个区域分12等分，所得结果为

$$qa^4/972D=\left[1+1.514\left(\frac{w_0}{d}\right)^2\right]w_0 \tag{8.66}$$

式中w_0为最大挠度，a为三角形的高。这个结果与文献[4]很接近（见图8.5）。



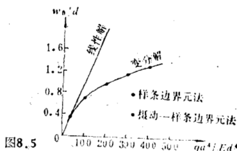


图8.5

【例8.6】 图8.6是一个周边固定的圆板，受温度变化作用，$\tau=[T_0+T_1(1-r^2/a^2)](1+2z/3k)$，$k=a/d$，求它的大挠度问题。

本例对整个边界Γ分为20等分，所得结果见图8.6和图8.7，这个结果与文献[6]非常接近。

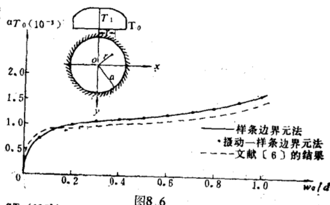


图8.6

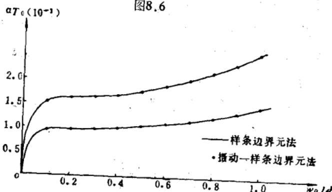


图8.7

计算结果表明，利用样条边界元法计算薄板大挠度问题，不仅计算简便，而且精度也高。因此，样条边界元法对薄板大挠度问题的计算是一个有效的方法。

对薄板大挠度问题，也可用荷载增量——样条边界元法求解。如果荷载q有一个增量δq，则u、v、w及σ_{ij}也有一个相应的增量δu、δv、δw及$\delta\sigma_{ij}$，即

$$\left.\begin{aligned}&u'=u+\delta u,\quad v'=v+\delta v,\quad w'=w+\delta w\\&\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij},\quad w'_{,ij}=w_{,ij}+\delta w_{,ij}\end{aligned}\right\}\tag{8.67}$$

于是由式(8.1)和式(8.2)可得下列增量方程：

$$D\nabla^4\dot{w}=\dot{q}+d(\sigma_{ij}\dot{w}_{,ij}+\dot{\sigma}_{ij}w_{,ij})\tag{8.68}$$

$$\dot{\sigma}_{ij,j}=0 \qquad i,j=1,2 \tag{8.69}$$

式中 $\dot{u}=\delta u,\quad \dot{v}=\delta v,\quad \dot{w}=\delta w$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{u}=\delta u,\quad \dot{v}=\delta v,\quad \dot{w}=\delta w\\&\dot{w}_{,ij}=\delta w_{,ij},\quad \dot{\sigma}_{ij}=\delta\sigma_{ij},\quad \dot{q}=\delta q\end{aligned}\right\} \tag{8.70}$$

式中σ_{ij}和$w_{,ij}$分别为加荷载增量δq前的 $\delta\sigma_{ij}$ 和 $\delta w_{,ij}$ 的累计值，即

$$\sigma_{ij}=\sum_{e=1}^{r-1}(\dot{\sigma}_{ij})_e,\quad w_{,ij}=\sum_{e=1}^{r-1}(w_{,ij})_e \tag{8.71}$$

式(8.68)和式(8.69)可化为下列边界积分方程：

$$\begin{aligned}C(P)\dot{w}_k(P)=&\int_\Gamma[w_k^*(P,s)\dot{V}_n(s)-\theta_k^*(P,s)\dot{M}_n(s)\\&-V_{nk}^*(P,s)\dot{w}(s)+M_{nk}^*(P,s)\dot{\theta}(s)]d\Gamma\\&+\dot{T}_k(P)+\dot{F}_k(P)\end{aligned} \tag{8.72}$$

$$\begin{aligned}C_{kl}(P)\dot{u}_k(P)=&\int_\Gamma[u_{kl}^*(P,s)\dot{p}_l(s)-p_{kl}^*(P,s)\dot{u}_l(s)]d\Gamma\\&+\dot{f}_k(P)\qquad k=1,2\end{aligned} \tag{8.73}$$

式中 $\dot{w}_1=\dot{w} \qquad \dot{w}_2=\dot{\theta}$

$$\dot{F}_k(P)=\int_\Omega \dot{\bar{q}}(Q)w_k^*(P,Q)d\Omega \tag{8.74}$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_k(P)=&\frac{1}{2}\int_\Omega D_{klm}(P,Q)[\dot{w}_{,l}(Q)w_{,m}(Q)\\&+w_{,l}(Q)\dot{w}_{,m}(Q)]d\Omega\end{aligned} \tag{8.75}$$

$$\bar{\dot{q}}(Q)=\dot{q}(Q)+d[\dot{\sigma}_{ij}(Q)w_{,ij}(Q)+\sigma_{ij}(Q)\dot{w}_{,ij}(Q)] \quad (8.76)$$

如果将整个边界分为M个区域，又将每边界区域为 N_m个等分，则式(8.72)和式(8.73)可以变为样条边界元法的计算格式。计算方法和过程与§8.2相同(见文献[8])。

参 考 文 献

[1]秦荣，薄板大挠度问题的样条边界元法，广西大学，1985年；第二届计算物理学会年会论文，1987年。

[2]钱伟长，圆薄板大挠度理论的摄动法，《弹性圆薄板大挠度问题》，中国科学院出版，1954年。

[3]秦荣，摄动——样条边界元法，广西大学，1976年。

[4]Feng Zhengnong, Li Zengfu, Application of Boundry Element Method in Bending Problem of Thin Plates With Large Deflection，北京工程中边界元方法国际会议论文集，1986年。

[5]徐次达，固体力学加权残数法，同济大学出版社，1987年。

[6]叶天麒，刘铁军，受热弹性薄板大挠度分析的边界元方法，第一届工程中的边界元法会议论文集，1985年。

[7]A.C.沃耳密尔，柔韧板与柔韧壳，科学出版社，1959年。

[8]秦荣，荷载增量——样条边界元法，广西大学，1986年；广西力学学会1987年年会论文。

第九章　塑性问题的样条边界元法

塑性问题是一种材料非线性问题，普遍发生在工业建设和国防建设中。如果在工程设计中考虑塑性，则可以挖掘材料潜力，提高结构承载能力，使工程经济合理和安全可靠。因此，近年来，塑性力学在工程中（例如，结构分析，金属压力加工，船舱设计……）的应用已日益广泛。

如果在工程设计中考虑塑性问题，则结构便是一个材料非线性问题。对工程中的这种材料非线性问题，由于应力应变关系是非线性的，用解析法精确地求解是不行的，只得采用数值方法。因此研究塑性力学的计算方法是一个非常重要的研究课题。

国内外对塑性力学中的数值方法做过许多研究。目前，塑性问题的求解，一般采用有限元法、边界元法及加权残数法。用有限元法解塑性问题，程序复杂，内存很多，对电子计算机要求高，输入工作量及计算工作量巨大，耗工费时，计算费用昂贵。因此，又出现了用边界元法及加次残数法解塑性问题。用边界元法及加权残数法解塑性问题比有限元法优越。我们在上述基础上提出一个塑性问题的样条边界元法[1][2]。计算结果表明，利用样条边界元法求解塑性问题是一个有效的方法。

本章主要介绍塑性问题的样条边界元法，而且以弹塑性问题作为研究对象。

§9.1　弹塑性问题

图 9.1 是一个拉伸试件的应力应变图。由图可知，当试件中

的应力超过弹性极限A点后，便发生屈服现象。由于弹性极限与屈服极限相差不大，通常以屈服应力σ_s表示。如果应力到B点开始卸载，则应力应变曲线沿BD下降，且$BD /\!/ OA$，这时一部分弹性应变消失了，另一部分塑性应变不能消失。由此可知，当应力超过屈服应力时，应变包括两部分，一部分是弹性应变，另一部分是塑性应变，即

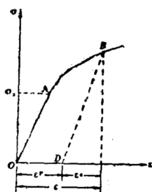


图9.1

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \qquad (9.1)$$

式中ε^e为弹性应变，ε^p为塑性应变。

软钢及强化率不大的材料可以作为理想弹塑性体处理(图9.2a)。多数材料具有强化特性，线性强化弹塑性模型的应力应变关系如图9.2b所示。由上述可知，弹塑性问题与应力历史有关。

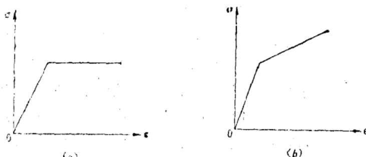


图9.2

在塑性力学中，建立屈服条件、加载条件及本构关系是一个非常重要的问题。

如何确定材料由初始弹性状态进入塑性状态呢？在简单拉伸时，材料由初始弹性状态进入塑性状态的界限是屈服极限σ_s。当应力达到屈服极限时，材料开始进入塑性状态。但在复杂应力

状态下，材料由弹性状态进入塑性状态就复杂了。为了判断材料各部分是否进入塑性状态，需要建立一种屈服条件。在复杂应力状态下的初始弹性状态的界限称为屈服条件，即

$$f(\sigma_{ij},\ \varepsilon_{ij},\ t,\ T)=0 \qquad (9.2)$$

式中σ_{ij}为应力，ε_{ij}为应变，t为时间，T为温度变化。如果不考虑时间效应和温度变化，则式（9.2）不包含t及T。另外，如果材料在初始屈服之前处于弹性状态，则应力与应变之间有一一对应关系，式（9.2）中的ε_{ij}可用σ_{ij}表示，这时屈服条件便变为

$$f(\sigma_{ij})=0 \qquad (9.3)$$

式（9.3）表示一个包围原点的曲面，称为屈服曲面。当应力点σ_{ij}位于这曲面之内时，$f(\sigma_{ij})<0$，材料处于弹性状；当应力点σ_{ij}位于这曲面上时，$f(\sigma_{ij})=0$，材料开始屈服。式（9.3）也称屈服函数。

目前有两个常用的屈服条件：（1）屈瑞斯加（Tresca）屈服条件；（2）米塞斯（Mises）屈服条件，详见文献[3]及文献[4]。

如果材料是强化的，材料进入塑性状态之后，由于强化效应，使得相继弹性范围不但与初始弹性范围不同，而且自身也是随强化程度而变化的。相继弹性范围的界限叫做相继屈服条件或加载条件。对于强化材料，加载条件与屈服条件不同，它随着塑性变形的发展而不断变化。在复杂应力状态下，加载条件为

$$f(\sigma_{ij},\ H_{\alpha})=0 \qquad \alpha=1,2,\cdots \qquad (9.4)$$

式中H_{α}为材料力学性质的记录史参数，它与塑性变形历史有关。式（9.4）也称强化条件。

式（9.4）是一个加载函数，表示一个加载曲面，它不仅与

瞬时应力有关，而且与材料的加载历史有关，与材料力学性质的记录史有关。对于强化材料，可能有下列三种情况：

（1） 应力点从一个瞬时加载面向外移到相邻的另一个加载面，材料从一个塑性状态进入另一个新的塑性状态。在此过程中，塑性应变和H_α都变化。这个过程叫做加载过程。

（2） 应力点虽然移动，但保持在原来瞬时加载面上，H_α无变化，塑性应变也保持不变。这个过程叫做中性变载过程。

（3） 应力点从瞬时加载面向内移动，材料由塑性状态进入弹性状态，塑性应变保持不变，H_α也不变。这个过程叫做卸载过程。

因为 $$df=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}+\frac{\partial f}{\partial H_\alpha}dH_\alpha \tag{9.5}$$

因此，上述三种过程的条件为

$$\left.\begin{aligned}&f=0,\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}>0 &&（加载准则）\\&f=0,\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}=0 &&（中性变载准则）\\&f=0,\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}<0 &&（卸载准则）\end{aligned}\right. \tag{9.6}$$

如果材料为理想塑性体，则屈服曲面与加载曲面重合，这称为极限曲面。这时，屈服函数只与应力有关，与应力历史无关，即

$$f(\sigma_{ij})=0 \tag{9.7}$$

同时

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}=0 &&（中性变载）\\&\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}<0 &&（卸载）\end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

加载曲面变化是很复杂的，不容易用实验方法来完全确定 f 的具体形式。特别是，随着塑性变形的增长，材料变形的各向异性效应愈益显著，问题就更加复杂了。因此，为了便于应用，往往对强化条件进行若干简化的假设。目前广泛应用的有两个近似强化条件：

（1） 等向强化模型。这种方案认为材料在塑性变形后，仍然保持各向同性的性质，忽略了由于变形引起的各向异性的影响。

如果设初始屈服函数为

$$\tilde{f}(\sigma_{ij})-k=0 \tag{9.9}$$

则等向强化模型的强化函数可写成下列形式：

$$f(\sigma_{ij},\ H_\alpha)=\tilde{f}(\sigma_{ij})-K(H_\alpha)=0 \tag{9.10}$$

式中$K(H_\alpha)$为H_α的单调递增正函数，k为材料常数。

（2） 随动强化模型。这个模型假设在塑性变形过程中，屈服曲面的大小及形状都不变，只在应力空间内作刚性平移。它的强化函数可写成下列形式：

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij},\ H_\alpha) &= f(\sigma_{ij}-\alpha_{ij}) \\ &= \tilde{f}(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})-k=0 \end{aligned} \tag{9.11}$$

式中 α_{ij}叫做移动张量，与塑性变形有关，而且有下列关系：

$$d\alpha_{ij}=c\,d\varepsilon_{ij}^{p} \tag{9.12}$$

式中 c 对于线性强化材料为正常数。

等向强化模型只有在塑性变形不大时或应力偏量之间的相互比例改变不大时求得的结果才接近实际，由于这种模型便于数学处理，因此使用得较多。当塑性变形较大，尤其是应力有反复变化时，这个模型与实验结果不符合，在这种情况下，可以采用随

动强化模型。这些模型的具体应用详见文献[3]和文献[4]。

在塑性力学中，本构关系目前有两种理论：（1）全量理论，也称形变理论，建立应力全量与应变全量之间的关系；（2）增量理论，也称流动理论，建立应力增量与应变增量的关系。详见文献[3]和文献[4]。增量理论在理论上比全量理论优越，不受加载条件的限制，但计算比全量理论复杂；全量理论在数学上简洁，应用方便，但只在简单加载条件下适用。在非简单加载情况下，全量理论一般是不能使用的。但由于应用方便，因此在非简单加载情况下也经常使用全量理论求解，而且有时所得结果和实验结果相当接近。由此可知，全量理论的适用范围实际上比简单加载条件要宽得多。于是许多学者探讨应力路径偏离简单加载条件多远而全量理论仍然适用，提出一个偏离简单加载问题，这个问题至今仍未很好解决。

在塑性力学中，应变增量$d\varepsilon_{ij}$可以写成下列形式：

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^{e}+d\varepsilon_{ij}^{p} \qquad (9.13)$$

式中 $d\varepsilon_{ij}^{e}$ 为弹性应变增量；

$d\varepsilon_{ij}^{p}$ 为塑性应变增量。

塑性应变增量可以采用下列形式：

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (9.14)$$

式中$d\lambda$为比例系数。如果将f作为塑性位势并令它等于屈服函数，则式（9.14）可称为与屈服条件相关的流动法则，它将塑性应变的规律与屈服条件联系起来了。由此可知，屈服条件与塑性应力应变关系有着直接的关系。

式（9.13）和式（9.14）也可以写成下列形式

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}+\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \qquad (9.15)$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{9.16}$$

式中$\dot{\varepsilon}$本来代表应变率，本章用来表示应变增量。在本章中，凡带圆点的都表示增量。

在增量理论中，目前用得最广泛的有两个：（1）等向强化模型的增量理论；（2）随动强化模型的增量理论，详见文献[3]和文献[4]。

在随动强化模型的增量理论中，$\dot{\alpha}_{ij}$与$\dot{\varepsilon}^p_{ij}$有下列关系：

$$d\alpha = c\,d\varepsilon^p \tag{9.17}$$

式中
$$c = 1/h|\nabla f|^2 \tag{9.18}$$

式（9.17）是一个矢量形式，∇f表示列矢$\{\partial f/\partial \sigma_{ij}\}$，$d\alpha$表示列矢$\{d\alpha_{ij}\}$，$d\varepsilon^p$表示列矢$\{d\varepsilon^p_{ij}\}$。在加载过程中的任一瞬时，$h$和$|\nabla f|$都是应力和记录史的函数。式（9.17）也可以写成下列形式：

$$\dot{\alpha}_{ij} = c\dot{\varepsilon}^p_{ij} \tag{9.19}$$

式中
$$c = 1/h\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right) \tag{9.20}$$

由此可知，随动强化材料的记录史，也可用塑性应变$\dot{\varepsilon}^p_{ij}$为参数。因此，随动强化材料的加载函数可写成下列形式：

$$f = f(\sigma_{ij},\ \varepsilon^p_{ij}) = 0 \tag{9.21}$$

这种以塑性应变为记录史参数的材料，称为应变强化材料。

塑性力学的内容很丰富，本节介绍的内容是一个引言，详细内容请见文献[3]、文献[4]和塑性力学有关书籍。

§9.2 基本方程

根据弹塑性问题的增量理论，平衡方程和边界条件可写成下列增量形式：

$$\dot{\sigma}_{ij,j}+\dot{b}_i=0 \quad \forall Q\in\Omega \tag{9.22}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij}n_j=\dot{\bar{p}}_i \quad & \forall Q\in\Gamma_p\\ \dot{u}_i=\dot{\bar{u}}_i \quad & \forall Q\in\Gamma_u\end{aligned}\right\} \tag{9.23}$$

对于一个带有塑性应变和温度应变的物体，总应变增量为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\dot{\varepsilon}^e_{ij}+\dot{\varepsilon}^p_{ij}+\dot{\varepsilon}^T_{ij} \tag{9.24}$$

而且
$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}\right) \tag{9.25}$$

式中ε^e_{ij}为弹性应变增量，它与总应力增量之间服从虎克定律：

$$\dot{\sigma}_{ij}=D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{9.26}$$

式中
$$D_{ijkl}=\frac{2G\mu}{1-2\mu}\delta_{ij}\delta_{kl}+G(\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jl}) \tag{9.27}$$

因为
$$\dot{\varepsilon}^e_{ij}=\dot{\varepsilon}_{ij}-\dot{\varepsilon}^p_{ij}-\dot{\varepsilon}^T_{ij} \tag{9.28}$$

因此式（9.26）便变为

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij}=&\ 2G(\dot{\varepsilon}_{ij}-\dot{\varepsilon}^p_{ij}-\dot{\varepsilon}^T_{ij})\\ &+\frac{2G\mu}{1-2\mu}\left(\dot{\varepsilon}_{kk}-\dot{\varepsilon}^p_{ll}-\dot{\varepsilon}^T_{ll}\right)\delta_{ij}\end{aligned} \tag{9.29}$$

式中$\dot{\varepsilon}^T_{ij}$为温度应变增量。式（9.29）可写成下列形式

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}^{\tau}_{ij}) + \frac{2G\mu}{1-2\mu}\left(\dot{\varepsilon}_{kk} - \dot{\varepsilon}^{\tau}_{ll}\right)\delta_{ij} - \dot{\sigma}^{p}_{ij}$$

(9.30)

式中 $$\dot{\sigma}^{p}_{ij} = 2G\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} + \frac{2G\mu}{1-2\mu}\dot{\varepsilon}^{p}_{ll}\,\delta_{ij} \tag{9.31}$$

利用式(9.22)至式(9.29)可得:

$$\frac{G}{1-2\mu}\dot{u}_{k,ki} + G\dot{u}_{i,kk} + \dot{\tilde{b}}_i = 0 \tag{9.32}$$

$$\frac{2G\mu}{1-2\mu}\dot{u}_{k,k}n_i + G(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})n_j = \dot{\tilde{p}}_i \tag{9.33}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{b}}_i &= \dot{b}^e_i + \dot{b}^p_i \\ \dot{\tilde{p}}_i &= \dot{p}^e_i + \dot{p}^p_i \end{aligned}\right\} \tag{9.34}$$

$$\dot{b}^e_i = \dot{b}_i - 2G\left(\dot{\varepsilon}^{\tau}_{ij,j} + \frac{\mu}{1-2\mu}\dot{\varepsilon}^{\tau}_{ll,i}\right) \tag{9.35}$$

$$\dot{b}^p_i = -2G\left(\dot{\varepsilon}^{p}_{ij,j} + \frac{\mu}{1-2\mu}\dot{\varepsilon}^{p}_{ll,i}\right) \tag{9.36}$$

$$\dot{p}^e_i = \dot{p}_i + 2G\left(\dot{\varepsilon}^{\tau}_{ij}\,n_j + \frac{\mu}{1-2\mu}\dot{\varepsilon}^{\tau}_{ll}\,n_i\right) \tag{9.37}$$

$$\dot{p}^p_i = 2G\left(\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}\,n_j + \frac{\mu}{1-2\mu}\dot{\varepsilon}^{p}_{ll}\,n_i\right) \tag{9.38}$$

上述各式对三维问题及平面应变问题都适用。对于平面应力

问题，只要用$\overline{\mu}$代替式中的μ就行了。这时$\overline{\mu}$由下式决定：

$$\overline{\mu}=\mu/(1+\mu) \tag{9.39}$$

式中μ为泊松系数。

利用式（9.32）和式（9.33）可将位移表为两组解的简单叠加，即

$$\dot{u}_i=\dot{u}_i^a+\dot{u}_i^p \tag{9.40}$$

式中$\dot{u}_i^a$为对应于体力$\dot{b}_i^a$及面力$\dot{p}_i^a$的弹性解；$\dot{u}_i^p$为对应于虚体力$\dot{b}_i^p$及虚面力$\dot{p}_i^p$的解，它表示塑性变形对位移的影响。同理，应力也可由对应的两组解构成，即

$$\dot{\sigma}_{ij}=\dot{\sigma}_{ij}^a+\dot{\sigma}_{ij}^p \tag{9.41}$$

§9.3 边界积分方程

式（9.32）在形式上与弹性力学的平衡方程完全相同，式（9.33）在形式上也与弹性力学的位移面力关系相同。因此，塑性力学的边界积分方程可写成下列形式：

$$C_{kl}(P)\dot{u}_l(P)=\int_\Gamma\left[u_{kl}^*(P,Q_0)\dot{\tilde{p}}_l(Q_0)-p_{kl}^*(P,Q_0)\dot{u}_l(Q_0)\right]d\Gamma+\int_\Omega u_{kl}^*(P,Q)\dot{\tilde{b}}_l(Q)d\Omega \tag{9.42}$$

式中$C_{kl}(P)$为P点的奇异系数，u_{kl}^*及p_{kl}^*为弹性力学的开尔文

基本解，与第四章相同。由式（9.34）可知：

$$\tilde{\dot{b}}_i = \dot{b}_i - \dot{\sigma}^{\tau}_{ij,j} - \dot{\sigma}^{p}_{ij,j} \tag{9.43}$$

则
$$\int_{\Omega} u^*_{ki} \tilde{\dot{b}}_i d\Omega = \int_{\Omega} u^*_{ki} (\dot{b}_i - \dot{\sigma}^{\tau}_{ij,j} - \dot{\sigma}^{p}_{ij,j}) d\Omega \tag{9.44}$$

利用分部积分法可得：

$$\left.\begin{aligned}
\int_{\Omega} u^*_{ki} \dot{\sigma}^{\tau}_{ij,j} d\Omega &= \int_{\Gamma} u^*_{ki} \dot{\sigma}^{\tau}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{\tau}_{ij} d\Omega \\
\int_{\Omega} u^*_{ki} \dot{\sigma}^{p}_{ij,j} d\Omega &= \int_{\Gamma} u^*_{ki} \dot{\sigma}^{p}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{p}_{ij} d\Omega
\end{aligned}\right\} \tag{9.45}$$

由于亚标的可替换性，则

$$\left.\begin{aligned}
u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{\tau}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{\tau}_{ij} + u^*_{kj,i} \dot{\sigma}^{\tau}_{ji} \right) \\
u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{p}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{p}_{ij} + u^*_{kj,i} \dot{\sigma}^{p}_{ji} \right)
\end{aligned}\right\} \tag{9.46}$$

由于$\dot{\sigma}^{\tau}_{ij}$及$\dot{\sigma}^{p}_{ij}$为对称张量，则式（9.46）便变为

$$\left.\begin{aligned}
u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{\tau}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(u^*_{ki,j} + u^*_{kj,i} \right) \dot{\sigma}^{\tau}_{ij} \\
u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{p}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(u^*_{ki,j} + u^*_{kj,i} \right) \dot{\sigma}^{p}_{ij}
\end{aligned}\right\} \tag{9.47}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}
u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{\tau}_{ij} &= \varepsilon_{kij} \dot{\sigma}^{\tau}_{ij} \\
u^*_{ki,j} \dot{\sigma}^{p}_{ij} &= \varepsilon_{kij} \dot{\sigma}^{p}_{ij}
\end{aligned}\right\} \tag{9.48}$$

式中

$$\varepsilon_{klj}=\frac{1}{8\alpha\pi(1-\mu)Gr^{\alpha}}\left[\frac{1-\mu}{r}\left(r_j\delta_{kl}+r_l\delta_{jk}\right)\right.$$

$$\left.-r_k\delta_{lj}/r+\beta r_j r_k r_l/r^3\right] \quad (9.49)$$

对于二维问题，式中$\alpha=1$，$\beta=2$；对于三维问题，式中$\alpha=2$，$\beta=3$。

由式（9.34）可知：

$$\dot{\tilde{p}}_l=\dot{p}_l+\dot{\sigma}_{lj}^{\tau}n_j+\dot{\sigma}_{lj}^{p}n_j \quad (9.50)$$

将式（9.45）代入式（9.44）可得

$$\int_{\Omega}u_{kl}^{*}\dot{\tilde{b}}_l\,d\Omega=\int_{\Omega}u_{kl}^{*}\dot{b}_l d\Omega-\int_{\Gamma}u_{kl}^{*}(\dot{\sigma}_{lj}^{\tau}+\dot{\sigma}_{lj}^{p})n_j d\Gamma$$

$$+\int_{\Omega}\varepsilon_{klj}(\dot{\sigma}_{lj}^{\tau}+\dot{\sigma}_{lj}^{p})d\Omega \quad (9.51)$$

将式（9.50）、式（9.51）代入式（9.42）可得：

$$C_{kl}(P)\dot{u}_l(P)=\int_{\Gamma}[u_{kl}^{*}(P,Q_0)\dot{p}_l(Q_0)$$

$$-p_{kl}^{*}(P,Q)\dot{u}_l(Q_0)]d\Gamma+\int_{\Omega}u_{kl}^{*}(P,Q)\dot{b}_l(Q)d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}\varepsilon_{klj}(\dot{\sigma}_{lj}^{\tau}+\dot{\sigma}_{lj}^{p})d\Omega \quad (9.52)$$

式（9.52）与第四章弹性力学的边界积分方程相比只多了一项：

$$\int_{\Omega}\varepsilon_{klj}(\dot{\sigma}_{lj}^{\tau}+\dot{\sigma}_{lj}^{p})d\Omega$$

$$=\int_{\Omega}\varepsilon_{klj}\dot{\sigma}_{lj}^{\tau}d\Omega+\int_{\Omega}\varepsilon_{klj}\dot{\sigma}_{lj}^{p}d\Omega \quad (9.53)$$

式（9.53）右边第一项代表温度变化的影响，第二项代表塑性应

力增量的影响。

式(9.52)为初应力公式。利用功的互等定理可以由式(9.52)得到相应的初应变公式，由功的互等定理可得：

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{klj} (\dot{\sigma}_{ij}^{\tau} + \dot{\sigma}_{ij}^{p}) d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \sigma_{klj} (\dot{\varepsilon}_{ij}^{\tau} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}) d\Omega \tag{6.54}$$

对于平面应变问题，则利用功的互等定理可得：

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{klj} (\dot{\sigma}_{ij}^{\tau} + \dot{\sigma}_{ij}^{p}) d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \overline{\sigma}_{klj} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\tau} d\Omega + \int_{\Omega} \widetilde{\sigma}_{klj} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} d\Omega \tag{9.55}$$

式中 $$\widetilde{\sigma}_{klj} = \sigma_{klj} + \frac{2\mu r_j \delta_{kl}}{4\pi(1-\mu)r^2} \qquad (\dot{\varepsilon}_{kk}^{p} = 0) \tag{9.56}$$

$$\overline{\sigma}_{klj} = \sigma_{klj} - \frac{\mu r_j \delta_{kl}}{4\pi(1-\mu)r^2} \qquad (\dot{\varepsilon}_{kl}^{\tau} = \alpha \dot{T} \delta_{kl}) \tag{9.57}$$

如果假设塑性应变体积的不可压缩性，则

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^{p} = 0 \qquad k = 1, 2, 3 \tag{9.58}$$

在平面应变问题中，因为式(9.56)右边第二项中已考虑到$(\sigma_{k33}\dot{\varepsilon}_{33}^{p})$的效应，因此有关公式的指标均为1～2的变化范围。对于平面应力问题，式(9.55)可以适用，但注意σ_{klj}属于平面应力问题的。另外，温度应变为 $\dot{\varepsilon}_{kl}^{\tau} = \alpha \dot{T} \delta_{kl}$ 。

§9.4 内点应力公式

（一）初应变形式

区域Ω内任一点P的位移为

$$\dot{u}_k(P)=\int_\Gamma[u_{kl}^*\dot{p}_l-p_{kl}^*\dot{u}_l]d\Gamma+\int_\Omega u_{kl}^*\dot{b}_l d\Omega$$

$$+\int_\Omega\sigma_{klj}(\dot{\varepsilon}_{lj}^\tau+\dot{\varepsilon}_{lj}^p)d\Omega \qquad (9.59)$$

对式（9.59）求导可得：

$$\dot{u}_{k,m}=\int_\Gamma[u_{kl,m}^*\dot{p}_l-\dot{p}_{kl,m}^*\dot{u}_l]d\Gamma+\int_\Omega u_{kl,m}^*\dot{b}_l d\Omega$$

$$+\left(\int_\Omega\sigma_{klj}(\dot{\varepsilon}_{lj}^\tau+\dot{\varepsilon}_{lj}^p)d\Omega\right)_{,m} \qquad (9.60)$$

式（9.60）右边前三项的导数不成问题，但最后一项，由于σ_{klj}的奇异性较强，求导数较为复杂。现以平面问题为例（图9.3)，先以奇点P为圆心，ε为半径作一个小圆，这个小圆的圆周和原区域Ω的边界Γ一起构成一个新的区域Ω_ε。当$\varepsilon\to0$时，$\Omega_\varepsilon\to\Omega$。其次假设

$$V_k=\int_\Omega\sigma_{klj}\dot{\varepsilon}_{lj}^p d\Omega=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega_\varepsilon}\sigma_{klj}\dot{\varepsilon}_{lj}^p d\Omega \qquad (9.61)$$

则对式（9.61）求导可得：

$$V_{k,m}=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{\partial}{\partial x_m(p)}\int_{\Omega_\varepsilon}\sigma_{klj}\dot{\varepsilon}_{lj}^p d\Omega\right] \qquad (9.62)$$

由此可得：

$$V_{k,m}=\int_{\Omega}\sigma_{klj,m}\dot{\varepsilon}^{p}_{lj}\,d\Omega$$

$$+\dot{\varepsilon}^{p}_{lj}\int_{\Gamma_{\varepsilon}}\sigma_{klj}(r_m/r)d\Gamma \qquad (9.63)$$

式中

$$\sigma_{klj}=\frac{1}{4\alpha\pi(1-\mu)r^{\alpha}}\left[\frac{1-2\mu}{r}\left(r_j\delta_{kl}+r_l\delta_{jk}\right.\right.$$

$$\left.\left.-r_k\delta_{lj}\right)+\beta r_j r_k r_l/r^3\right] \qquad (9.64)$$

对于三维问题，式中$\alpha=2$，$\beta=3$；对于二维问题，式中$\alpha=1$，$\beta=2$。将式（9.64）代入式（9.63）右边第二项可得：

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{lj}\int_{\Gamma_{\varepsilon}}\sigma_{klj}(r_m/r)d\Gamma=\frac{1}{15(1-\mu)}\left[(8-10\mu)\dot{\varepsilon}^{p}_{km}\right.$$

$$\left.-(1-5\mu)\dot{\varepsilon}^{p}_{ll}\,\delta_{jm}\right] \qquad (9.65)$$

设 $$W_k=\int_{\Omega}\sigma_{klj}\dot{\varepsilon}^{\tau}_{lj}\,d\Omega=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_{\varepsilon}}\sigma_{klj}\dot{\varepsilon}^{\tau}_{lj}\,d\Omega \qquad (9.66)$$

则 $$W_{k,m}=\int_{\Omega}\sigma_{kli,m}\dot{\varepsilon}^{\tau}_{lj}\,d\Omega+\frac{1+\mu}{3(1-\mu)}\dot{\varepsilon}^{\tau}_{lj} \qquad (9.67)$$

利用式（9.25）、式（9.29）及上述公式可得三维问题的内点应力公式：

$$\dot{\sigma}_{ij}=\int_{\Gamma}[D_{kij}\dot{p}_k-S_{kij}\dot{u}_k]\,d\Gamma+\int_{\Omega}D_{kij}\dot{b}_k d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}R_{kijm}(\dot{\varepsilon}^{\tau}_{km}+\dot{\varepsilon}^{p}_{km})d\Omega+f_{ij} \qquad (9.68)$$

式中 $$f_{ij}=-\frac{2G}{15(1-\mu)}\Big[(7-5\mu)\dot{\varepsilon}^{P}_{ij}+(1+5\mu)\dot{\varepsilon}^{P}_{kk}\delta_{ij}\Big]-\frac{4G}{3(1-\mu)}\Big(1+\mu\Big)\dot{\varepsilon}^{\tau}_{ij} \qquad (9.69)$$

$$R_{kijm}=\frac{G}{2\alpha\pi(1-\mu)r^{\beta}}\Big[\beta(1-2\mu)(\delta_{ij}r_kr_m+\delta_{km}r_ir_j)/r^2+\beta\mu(\delta_{mi}r_jr_k+\delta_{jk}r_mr_i+\delta_{ik}r_mr_j+\delta_{jm}r_ir_k)/r^2-\beta\gamma r_jr_ir_kr_m/r^4+(1-2\mu)(\delta_{ik}\delta_{mj}+\delta_{jk}\delta_{mi})-(1-4\mu)\delta_{ij}\delta_{km}\Big] \qquad (6.70)$$

对于三维问题，式中 $\alpha=2$，$\beta=3$，$\gamma=5$；对于二维问题，式中$\alpha=2$，$\beta=3$，$\gamma=4$。

对于平面应变问题，式（9.68）变为下列形式：

$$\dot{\sigma}_{ij}=\int_{\Gamma}[D_{kij}\dot{p}_k-S_{kij}\dot{u}_k]d\Gamma+\int_{\Omega}D_{kij}\dot{b}_kd\Omega+\int_{\Omega}[\overline{R}_{kijm}\dot{\varepsilon}^{\tau}_{km}+\widetilde{R}_{kijm}\dot{\varepsilon}^{P}_{km}]d\Omega+\widetilde{f}_{ij} \qquad (9.71)$$

式中 $$\widetilde{f}_{ij}=-\frac{G}{4(1-\mu)}\Big[2\dot{\varepsilon}^{P}_{ij}+(1-\mu)\dot{\varepsilon}^{P}_{kk}\delta_{ij}\Big]-\frac{G}{1-\mu}(1+\mu)\dot{\varepsilon}^{\tau}_{ij} \qquad (9.72)$$

$$\overline{R}_{kijm}=R_{kijm}-\frac{G\mu}{2\pi(1-\mu)r^2}\Big(2r_ir_j\delta_{km}/r^2-\delta_{ij}\delta_{km}\Big) \qquad (9.73)$$

$$\widetilde{R}_{kijm}=R_{kijm}+\frac{G\mu}{2\pi(1-\mu)r^{2}}\left(4r_{i}r_{j}\delta_{km}/r^{2}-2\delta_{i}\delta_{m}\right)$$

（9.74）

对于平面应力问题，式（9.71）仍然适用，只需将有关公式中的 μ 用 $\overline{\mu}$ 代替，且令 $\overline{R}_{kijm}=\widetilde{R}_{kijm}=R_{kijm}$ 及 $\widetilde{f}_{ij}$ 为

$$\widetilde{f}_{ij}=-\frac{G}{4(1-\overline{\mu})}\left(2\dot{\varepsilon}_{ij}^{P}+\dot{\varepsilon}_{kk}^{P}\delta_{ij}\right)-\frac{G}{1-\overline{\mu}}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\tau}$$

（9.75）

式中 $\overline{\mu}=\mu/(1+\mu)$

（二）初应力形式

如果不考虑温度变化的影响，则区域Ω内任一点P的应力公式可写成下列形式：

$$\dot{\sigma}_{ij}=G(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i})+\frac{2G\mu}{1-2\mu}u_{k,k}\delta_{ij}-\dot{\sigma}_{ij}^{P} \qquad (9.76)$$

区域Ω内任一点的位移为

$$\dot{u}_{k}(P)=\int_{\Gamma}[u_{kl}^{*}\dot{p}_{l}-p_{kl}^{*}\dot{u}_{l}]d\Gamma+\int_{\Omega}u_{kl}^{*}\dot{b}_{l}d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}\varepsilon_{klj}\dot{\sigma}_{lj}^{P}d\Omega \qquad (9.77)$$

将式（9.77）代入式（9.76）即可得到区域Ω内任一点P的应力公式。

设 $$V_{k}=\int_{\Omega}\varepsilon_{klj}\dot{\sigma}_{lj}^{P}d\Omega=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega}\varepsilon_{klj}\dot{\sigma}_{lj}^{P}d\Omega \qquad (9.78)$$

则 $$V_{k,m}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\partial}{\partial x_{m}(P)}\int_{\Omega_{\varepsilon}}\varepsilon_{klj}\dot{\sigma}_{lj}^{P}d\Omega\right] \qquad (9.79)$$

由此可得：

$$V_{k,m}=\int_{\Omega}\varepsilon_{klj,m}\dot{\sigma}^{P}_{lj}\,d\Omega$$

$$+\dot{\sigma}^{P}_{lj}\int_{\Gamma_{\varepsilon}}\varepsilon_{klj}(r_m/r)\,d\Gamma \qquad (9.80)$$

式中Γ_{ε}是以P点为圆心的单位圆周。

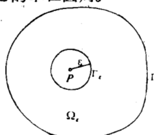


图9.3

利用上述公式可得三维问题的内点应力公式：

$$\dot{\sigma}_{ij}=\int_{\Gamma}[D_{kij}\dot{p}_k-\sigma_{kij}\dot{u}_k]\,d\Gamma+\int_{\Omega}D_{kij}\dot{b}_k\,d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}T_{kijm}\dot{\sigma}^{P}_{km}\,d\Omega+g_{ij} \qquad (9.81)$$

式中 $$g_{ij}=-\frac{1}{15(1-\mu)}\left[(7-5\mu)\dot{\sigma}^{P}_{ij}+(1-5\mu)\dot{\sigma}^{P}_{kk}\delta_{ij}\right]$$

$$(9.82)$$

$$T_{kijm}=\frac{1}{4\alpha\pi(1-\mu)r^{\beta}}\Big[(1-\mu)(\delta_{ik}\delta_{mj}+\delta_{jk}\delta_{mi}$$

$$-\delta_{ij}\delta_{km}+\beta\delta_{ij}r_kr_m/r^2)+\beta\mu(\delta_{mi}r_jr_k$$

$$+\delta_{jk}r_mr_i+\delta_{ik}r_mr_j+\delta_{jm}r_ir_m)/r^2$$

$$-\beta\delta_{km}r_ir_j/r^2-\beta\gamma r_ir_jr_kr_m/r^4\Big] \qquad (9.83)$$

对于三维问题，式中 $\alpha=2$，$\beta=3$，$\gamma=5$；对于二维问题，$\alpha=1$，$\beta=2$，$\gamma=4$。对于平面应变问题，式（9.81）中的 g_{ij} 为

$$g_{ij}=-\frac{1}{8(1-\mu)}\left[2\dot{\sigma}^{P}_{ij}+(1-4\mu)\dot{\sigma}^{P}_{kk}\delta_{ij}\right] \quad (9.85)$$

对于平面应力问题，上述公式中的 μ 用 $\overline{\mu}$ 代替就行了。

§9.5 弹塑性问题的样条边界元法

（一）计算格式

本节以平面问题为例。如果将区域 Ω 的整个边界 Γ 分为 M 个区域，则边界积分方程可变为

$$C_{kl}(P_0)\dot{u}_l(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\dot{\Pi}_{km}(P_0,s)$$

$$+\dot{F}_k(P_0)+\dot{J}(P_0)+\dot{S}(P_0) \quad (9.85)$$

式中

$$\Pi_{km}(P_0,s)=\int_{\Gamma_m}[u^*_{kl}(P_0,s)\dot{p}_l(s)$$

$$-p^*_{kl}(P_0,s)\dot{u}_l(s)]\,d\Gamma \quad (9.86)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{F}_k(P_0)&=\int_\Omega u^*_{kl}(P_0,Q)\dot{b}_l(Q)d\Omega\\ \dot{J}_k(P_0)&=\int_\Omega \overline{\sigma}_{kij}(P_0,Q)\dot{\varepsilon}^T_{ij}(Q)d\Omega\\ \dot{S}_k(P_0)&=\int_\Omega \widetilde{\sigma}_{kij}(P_0,Q)\dot{\varepsilon}^P_{ij}(Q)d\Omega\end{aligned}\right\} \quad (9.87)$$

式（9.87）为区域积分。对于区域积分，一般有下列三种方法：（1）将区域积分化为边界积分；（2）半解析半数值方法（见第二章）；（3）对整个区域积分进行数值积分：首先将区域积分分为有限个单元，其次将区域积分离散化，然后利用高斯求积公式进行计算。对于式（9.87）中的积分，根据不同的情况，可以从上述三种方法中选择一种合适的方法进行处理。例如，对于$\dot{F}_k(P_0)$的积分，可采用第一种方法；对于$\dot{J}_k(P_0)$的积分，可采用第二种方法；对于$\dot{S}_k(P_0)$的积分，可采用第三种方法。

如果$\dot{F}_k(P_0)$、$\dot{J}_k(P_0)$及$\dot{S}_k(P_0)$都采用第三种方法，则式（9.87）可变为

$$
\begin{aligned}
\dot{F}_k(P_0) &= \sum_{e=1}^{E_1}\int_{\Omega_e} u^*_{kl}(P_0,\ Q)\dot{b}_l(Q)d\Omega \\
\dot{J}_k(P_0) &= \sum_{e=1}^{E_2}\int_{\Omega_e} \overline{\sigma}_{klj}(P_0,\ Q)\dot{\varepsilon}^T_{lj}(Q)d\Omega \\
\dot{S}_k(P_0) &= \sum_{e=1}^{E_3}\int_{\Omega_e} \widetilde{\sigma}_{klj}(P_0,\ Q)\dot{\varepsilon}^P_{lj}(Q)d\Omega
\end{aligned}
\tag{9.88}
$$

计算$\dot{S}_k(P_0)$时，只对可能发生塑性变形的区域划分网格（图9.4）；计算$\dot{J}_k(P_0)$时，只对温度变形的区域划分网格；计算$\dot{F}_k(P_0)$时，则对整个区域Ω划分网格。

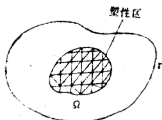


图9.4

对式（9.86）的离散有五种方法，这些方法在第四章（见§4.4）已有介绍，本节只简单地介绍两种方法：

1. **第一种方法**

如果将每个边界区域分为 N_m 分等分．则式（9.86）便变为

$$\dot{\Pi}_{km}(P_0, s_i)=\sum_{i=0}^{z}\lambda_i\,[\,u^*_{kl}(P_0, s_i)\dot{p}_l(s_i)$$

$$-\dot{p}^*_{kl}(P_0, s)\dot{u}_l(s_i)\,]\,h_m \qquad (9.89)$$

式中 λ_i 是与数值积分求积公式有关的系数，见第一章§1.7，$z=N_m$；P_0在边界Γ上，设$P_0=s_j$（$j=0, 1, 2, \cdots, N$），N为整个边界Γ的分段数。

利用第四章的做法，将式（9.89）代入式（9.85）可得：

$$[\,H\,]\{\dot{u}\}-[\,K\,]\{\dot{p}\}$$

$$=\{\dot{F}\}+[\,J\,]\{\dot{\varepsilon}^T\}+[\,S\,]\{\dot{\varepsilon}^P\} \qquad (9.90)$$

式中[H]、[K]、$\{\dot{u}\}$、$\{\dot{p}\}$和$\{\dot{F}\}$与第四章相同。同理从式（9.71）可得：

$$\dot{\sigma}_{la}(P)=\sum_{m=1}^{M}\dot{\tilde{\Pi}}_{lm}(P, s_i)+\dot{\tilde{F}}_l(P)$$

$$+\dot{\tilde{J}}_l(P)+\dot{\tilde{S}}_l(P) \qquad (9.91)$$

式中 $k, l, a, b=1, 2$

$$\dot{\tilde{\Pi}}_{km}(P, s_i)=\sum_{i=0}^{z}\lambda_i\,[\,D_{kla}(P,s_i)\dot{p}_k(s_i)$$

$$-S_{kla}(P, s_i)\dot{u}_k(s_i)\,]\,h_m \qquad (9.92)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\widetilde{F}}_k(P) &= \sum_{e=1}^{E_1}\int_{\Omega_e} D_{kla}(P,Q)\dot{b}(Q)_l d\Omega \\
\dot{\widetilde{J}}_k(P) &= \sum_{e=1}^{E_2}\int_{\Omega_e} \overline{R}_{klab}(P,Q)\dot{\varepsilon}^{\tau}_{kb}(Q)d\Omega \\
&\quad - \frac{G}{1-\mu}(1+\mu)\dot{\varepsilon}^{\tau}_{la}(P) \\
\dot{\widetilde{S}}_k(P) &= \sum_{e=1}^{E_3}\int_{\Omega_e} \widetilde{R}_{klab}(P,Q)\dot{\varepsilon}^{p}_{kb}(Q)d\Omega \\
&\quad - \frac{G}{4(1-\mu)}\Big[2\dot{\varepsilon}_{ij}(P) \\
&\quad + (1-\mu)\dot{\varepsilon}^{p}_{kk}(P)\delta_{la}\Big]
\end{aligned}\right\} \tag{9.93}
$$

利用第四章的做法，由式（9.90）可得：

$$
\begin{aligned}
\{\sigma\} = [\widetilde{K}]\{\dot{p}\} - [\widetilde{H}]\{\dot{u}\} + \{\dot{\widetilde{F}}\} \\
[\widetilde{J}]\{\dot{\varepsilon}^{\tau}\} + [\widetilde{S}]\{\dot{\varepsilon}^{p}\}
\end{aligned} \tag{9.94}
$$

2．第二种方法

如果边界未知量用三次B样条函数来逼近：

$$
\dot{u}_l(s) = \sum_{i=0}^{s} \dot{u}_{li}\phi_i(s)
$$

$$
\dot{p}_l(s) = \sum_{i=0}^{s} \dot{p}_{li}\phi_i(s)
$$

则式（9.86）可变为

$$\dot{\Pi}_{km}(P_0,s)=\sum_{i=0}^{z}\left[\left(\int_{\Gamma m}u_{ki}^{*}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)\dot{u}_{li}\right.$$

$$\left.-\left(\int_{\Gamma m}p_{ki}^{*}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)\dot{p}_{li}\right] \tag{9.95}$$

式中 $\sum_{i=0}^{z}\int_{\Gamma m}F(P_0,s)d\Gamma=\sum_{i=0}^{z}\int_{s_i}^{s_{i+1}}F(P_0,s)d\Gamma$

将式（9.95）代入式（9.85）即可得到式（9.90）。由上述可知，式（9.90）和式（9.94）可以代表五种方法的计算格式。

式（9.90）和式（9.94）与边界条件有关。在式（9.90）和式（9.94）中引入边界条件后，则式（9.90）和式（9.94）可变为下列形式：

$$[A]\{\dot{X}\}=\{\dot{f}\}+[S]\{\dot{\varepsilon}^p\} \tag{9.96}$$

$$\{\dot{\sigma}\}=[\tilde{A}]\{\dot{X}\}+\{\dot{f}\}+[\tilde{S}]\{\dot{\varepsilon}^p\} \tag{9.97}$$

式中$\{\dot{X}\}$是边界未知量增量的参数向量。

由式（9.96）可得：

$$\{\dot{X}\}=[Q]\{\dot{\varepsilon}^p\}+\{\dot{P}\} \tag{9.98}$$

式中 $[Q]=[A]^{-1}[S]$，$\{\dot{P}\}=[A]^{-1}\{\dot{f}\}$ (9.99)

将式（9.98）代入式（9.97）可得：

$$\{\dot{\sigma}\}=[\tilde{Q}]\{\dot{\varepsilon}^p\}+\{\dot{\tilde{P}}\} \tag{9.100}$$

$$\{\dot{P}\}=\{\dot{\tilde{f}}\}-[\tilde{A}]\{P\}$$

$$[\tilde{Q}]=[\tilde{S}]-[\tilde{A}][Q] \tag{9.101}$$

由上述可知，计算应力时，只用式（9.100）就行了。利用式（9.100）求出$\{\dot{\varepsilon}^P\}$后，即可用式（9.98）求出边界未知量增量的参数向量$\{\dot{X}\}$。

如何求解？本节介绍两种方法：（1）迭代法，（2）拟线性解法。

（二）迭代法

对于弹性问题，因为$\{\varepsilon^P\}=\{0\}$，因此由式（9.98）和式（9.100）可得：

$$\{\dot{X}\}=\{\dot{P}\} \tag{9.102}$$

$$\{\dot{\sigma}\}=\{\dot{\tilde{P}}\} \tag{9.103}$$

由此可知，$\{\dot{P}\}$和$\{\dot{\tilde{P}}\}$对应于荷载增量的弹性解，它们都满足迭加原理。

如果设$\{R_k\}$为前k级荷载增量之和，$\{R\}$为总荷载，对于比例加载，则有

$$\gamma_k=R_k/R \tag{9.104}$$

γ_k是一个荷载比例系数。

式（9.100）对于前k级荷载增量求和可得：

$$\{\sigma\}_k=[\tilde{Q}]\{\varepsilon^P\}_k+\gamma_k\{\tilde{P}\} \tag{9.105}$$

或 $$\{\sigma\}_k=[\widetilde{Q}](\{\varepsilon^P\}_{k-1}+\{\Delta\varepsilon^P\}_k)+\gamma_k\{\widetilde{P}\} \tag{9.106}$$

式中下标 k 对应于第 k 级荷载，$\{\widetilde{P}\}$为总荷载下的弹性应力解。

式中$\{\Delta\varepsilon^P\}_k$由所有点的 $\Delta\varepsilon^P_{ij}$ 组成。 $\Delta\varepsilon^P_{ij}$ 为塑性应变增量，可以由塑性增量理论决定。本节以Mises 屈服条件为例，根据各向同性强化材料的增量理论可知：

$$\Delta\varepsilon^P_{ij}=\frac{\Delta\varepsilon^P_e}{\varepsilon_{et}}e'_{ij} \tag{9.107}$$

式中 $$\Delta\varepsilon^P_e=\frac{3G\varepsilon_{et}-\sigma_B}{3G+H} \tag{9.108}$$

$$e'_{ij}=\varepsilon'_{ij}-\frac{1}{3}\varepsilon'_{ll}\,\delta_{ij} \tag{9.109}$$

$$\varepsilon_{et}=\sqrt{\frac{2}{3}e'_{ij}\,e'_{ij}} \tag{9.110}$$

$$\varepsilon'_{ij}=\frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij}-\frac{\mu}{1+\mu}\delta_{ll}\delta_{ij}\right)+\Delta\varepsilon^P_{ij} \tag{9.111}$$

其中H及σ_B都是前一级荷载下的量，是已知的，σ_B为前一级荷载下的屈服应力，H为硬化系数。

式（9.106）可以利用迭代法求解：

（1） 假设塑性应变增量的初值 $\{\Delta\varepsilon^P\}^0_k$。一般假设塑性变形为零。

（2） 将 $\{\Delta\varepsilon^P\}^0_k$代入式（9.106）求 $\{\sigma\}^0_k$。

（3） 利用式（9.111）求ε'_{ij}，其中 σ_{ij} 取 $\{\sigma\}^0_k$的分量。

（4） 利用（9.110）求ε_{et}。

（5） 利用式（9.108）求 $\Delta\varepsilon_e^P \geqslant 0$。

（6） 利用式（9.107）求 $\Delta\varepsilon_{ij}^P$。

（7） 利用第6步求得的所有点的 $\Delta\varepsilon_{ij}^P$ 可组成 $\{\Delta\varepsilon^P\}_k^1$，将它代入式（9.106），求出第一次迭代应力 $\{\sigma\}_k^1$。

（8） 重复步骤（3）至步（6）求 $\{\Delta\varepsilon_p\}_k^2$

（9） 利用式（9.106）求出第二次迭代应力 $\{\sigma\}_k^2$。

（10） 反复迭代运算，直到 $|\{\varepsilon^P\}^n - \{\varepsilon^P\}^{n-1}| < \varepsilon$，其中 ε 是给定的微小正数。这时 $\{\sigma\}_k^n$ 为本级荷载增量下的最后应力结果。

（11） 上述已完成第 k 级荷载下的迭代运算，接着可加入第 $k+1$ 级荷载，并由式(9.106)可知：

$$\{\sigma\}_{k+1} = [B](\{\varepsilon^P\}_k + \{\Delta\varepsilon^P\}_{k+1}) + \gamma_{k+1}\{\widetilde{P}\} \tag{9.112}$$

式中 $$\{\varepsilon^P\}_k = \{\varepsilon^P\}_{k-1} + \{\Delta\varepsilon^P\}_k \tag{9.113}$$

当 k 为最后一级荷载时，则 $\{\sigma\}_k$ 及 $\{\varepsilon^P\}_k$ 分别为最终应力 $\{\sigma\}$ 和最终塑性应变 $\{\varepsilon^P\}$。

（12） 将 $\{\varepsilon^P\}$ 代入下式：

$$\{X\} = [Q]\{\varepsilon^P\} + \{P\} \tag{9.114}$$

可得边界未知量，式中 $\{P\}$ 是全荷载下的弹性解（边界位移或边界面力。

在整个迭代过程中，$[\widetilde{Q}]$、$[Q]$、$\{\widetilde{P}\}$ 及 $\{P\}$ 保持不变，故计算很方便。

（三）拟线性解法

式（9.106）可以写成下列形式：

$$\{\dot{\sigma}\}=\{\dot{\sigma}\}^{e}+\{\dot{\sigma}\}^{P} \tag{9.115}$$

式中 $$\{\dot{\sigma}\}^{e}=\{\dot{\widetilde{f}}\}-[\widetilde{A}]\{\dot{P}\} \tag{9.116}$$

$$\{\dot{\sigma}\}^{P}=[\widetilde{Q}]\{\dot{\varepsilon}^{P}\} \tag{9.117}$$

这里 $\{\sigma\}^{e}$ 为弹性解对应的应力增量向量；$\{\dot{\sigma}\}^{P}$ 为塑性变形引起的应力增量向量；$[\widetilde{Q}]$为塑性变形对应力影响的系数矩阵，它与物体的弹性性质、几何形状和约束条件有关，即

$$[\widetilde{Q}]=[\widetilde{S}]-[\widetilde{A}][A]^{-1}[S] \tag{9.118}$$

根据塑性理论，对于进入屈服阶段的单元，其应力满足屈服准则：

$$f(\sigma,\sigma_0)=\overline{\sigma}^2-\sigma_0^2(\varepsilon^P,T)=0 \tag{9.119}$$

式中$\overline{\sigma}$为等效应力。

在加载阶段，它满足下列一致性条件：

$$df=\frac{\partial f}{\partial\sigma}d\sigma+\frac{\partial f}{\partial\sigma_0}d\sigma_0=0 \tag{9.120}$$

将 f 看作塑性势，根据增量理论，则有

$$d\varepsilon^P=c\frac{\partial f}{\partial\sigma} \tag{9.121}$$

对于每一个进入屈服的单元列出式（9.120）及式(9.121)，并利用式（9.115）和式（9.117），可得：

$$\sum_{j=1}^{E}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_i^{\mathrm{T}}[\widetilde{Q}_{ij}]\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_j c_j+\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_0}\right)_i d\sigma_{0i}$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_i^{\mathrm{T}} d\sigma_i^e=0, \qquad i=1,2,\cdots,E \qquad (9.122)$$

式中 E 为进入塑性屈服的单元，$[\widetilde{Q}_{ij}]$为将$[\widetilde{Q}]$按单元展开的子矩阵。

对于硬化材料，根据塑性理论可知：

$$d\sigma_0=cH\frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \qquad (9.123)$$

式中H表示硬化系数。将式（9.123）代入式（9.122）可得：

$$\sum_{j=1}^{E}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_i^{\mathrm{T}}[\widetilde{Q}_{ij}]\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_j c_j+\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_0}\right)_i^2 H_i c_i$$

$$=-\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_i^{\mathrm{T}} d\sigma_i^e \qquad i=1,2,\cdots,E \qquad (9.124)$$

由式（9.124）可得：

$$[G]\{c\}=\{g\} \qquad (9.125)$$

利用式（9.125）可求出c_j值，c_j必须大于或等于零，如果算出的c_j为负值，表示这个单元在荷载增量下处于卸荷状态，则必须重算。当c_j求出后，利用式（9.121）可求出在此荷载增量下所产生的塑性应变增量$d\varepsilon^P$；利用式（9.117）可求出应力增量$d\sigma^P$；利用式（9.115）可求出总应力增量$d\sigma$。由上述可得：

$$\{\sigma\}_{n+1}=\{\sigma\}_n+d\{\sigma\}_{n+1} \qquad (9.126)$$

式中$d\sigma_{n+1}$为（$n+1$）级荷载增量作用下的应力增量；σ_n为施加n级荷载增量后的应力；σ_{n+1}为施加（$n+1$）级荷载增量的后的

应力。

§9.6 薄板弹塑性问题的样条边界元法

本节以各向同性的小挠度薄板为例来建立薄板弹性问题的样条边界元法[2]。

（一）基本方程

对于小挠度弹塑性薄板的弯曲变形增量为

$$\dot{\chi}_{kl}=\dot{\chi}^{e}_{kl}+\dot{\chi}^{P}_{kl} \tag{9.127}$$

式中

$$\begin{aligned}&\dot{\chi}_{kl}=\dot{w}_{,kl} \qquad k,\ l=x,\ y\\&\dot{w}=\dot{w}^{e}+\dot{w}^{P}\end{aligned} \tag{9.128}$$

其中 $\dot{w}^{e}$ 及 $\dot{w}^{P}$ 分别为薄板的弹性挠度增量及塑性挠度增量；$\dot{\chi}^{e}_{kj}$ 及 $\dot{\chi}^{P}_{kl}$ 分别为薄板弹性曲率增量及塑性曲率增量。

弯曲内力与挠度有下列关系：

$$\begin{aligned}\dot{M}_{kl}=&-D(1-\mu)(\dot{\chi}_{kl}-\dot{\chi}^{P}_{kl})\\&-\mu D(\dot{\chi}_{ii}-\dot{\chi}^{P}_{ii})\delta_{kl}\end{aligned} \tag{9.129}$$

式中 μ 为泊松系数。

因为 $i,k,l=x,y$，因此

$$\dot{M}_{x}=\dot{M}_{xx},\ \dot{M}_{y}=\dot{M}_{yy};\qquad \dot{\chi}_{x}=\dot{\chi}_{xx},\ \dot{\chi}_{y}=\dot{\chi}_{yy} \tag{9.130}$$

薄板的平衡方程为

$$\dot{M}_{x,xx}+2\dot{M}_{xy,xy}+\dot{M}_{y,yy}=\dot{q} \tag{9.131}$$

式中 $\dot{q}$ 为板上横向荷载增量。

将式(9.129)代入式（9.131）可得弹塑性薄板的基本方程：

$$\nabla^4\dot{w}=\dot{q}+\dot{\bar{q}} \tag{9.132}$$

式中 $\dot{\bar{q}}$ 为薄板的等效荷载增量，即

$$\dot{\bar{q}}=D(\dot{\kappa}_x^P+\mu\dot{\kappa}_y^P)_{,xx}+D(\mu\dot{\kappa}_x^P+\dot{\kappa}_y^P)_{,yy}$$

$$+(1-\mu)D\dot{\kappa}_{xy,xy}^P \tag{9.133}$$

由上述可知，薄板的弯矩增量及扭矩增量为

$$\dot{M}_{kl}=\dot{M}_{kl}^e+\dot{M}_{kl}^P \tag{9.134}$$

式中$\dot{M}_{kl}^e$及$\dot{M}_{kl}^P$分别为薄板的弹性弯矩（或扭矩）增量及塑性弯矩（或扭矩）增量。

（二）边界积分方程

薄板边界积分方程的增量形式为

$$C(P)\dot{w}_k(P)=\int_\Gamma[w_k^*(P,s)\dot{V}_n(s)-\theta_k^*(P,s)\dot{M}_n(s)$$

$$-V_{nk}^*(P,s)\dot{w}(s)+M_{nk}^*(P,s)\dot{\theta}(s)]d\Gamma$$

$$+\dot{T}_k(P)+\dot{F}_k(P)+\dot{S}_k(P)\quad k=1,2,3 \tag{9.135}$$

式中 $\dot{w}_1=\dot{w}$　　　$\dot{w}_2=\dot{\theta}=\dot{w}_{,n}$

$$\dot{F}_k(P)=\int_\Omega \dot{q}(Q)w_k^*(P,Q)d\Omega \tag{9.136}$$

$$\dot{S}_k(P)=\int_\Omega [\varkappa^*]_k[D]\{\dot{\varkappa}\}^P d\Omega \tag{9.137}$$

其中 $[\varkappa^*]_k=[\varkappa_{xk}^* \quad \varkappa_{yk}^*(P,Q) \quad \varkappa_{xyk}^*(P,Q)]$

$$\left\{\dot{\varkappa}\right\}^P=\left[\dot{\varkappa}_x^P(Q) \quad \dot{\varkappa}_y^P(Q) \quad 2\dot{\varkappa}_{xy}^P(Q)\right]^{\mathrm{T}}$$

$$[D]=D\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\mu)/2\end{bmatrix}$$

其余记号与第五章相同。

薄板域内任一点的弯矩增量及扭矩增量为

$$\{\dot{M}\}=-[D]\{\dot{\varkappa}\} \tag{9.138}$$

式中 $\left\{\dot{M}\right\}=\left[\dot{M}_x \quad \dot{M}_y \quad \dot{M}_{xy}\right]^{\mathrm{T}}$

$$\left\{\dot{\varkappa}\right\}=\left[\dot{\varkappa}_x \quad \dot{\varkappa}_y \quad 2\dot{\varkappa}_{xy}\right]^{\mathrm{T}}$$

薄板域内任一点P的曲率增量为

$$\dot{\varkappa}_{kl}(P)=\int_\Gamma[\dot{V}_n(s)w^*_{,kl}(P,s)-\dot{M}_n(s)\theta^*_{,kl}(P,s)$$
$$-\dot{w}(s)V^*_{n,kl}(P,s)+\dot{\theta}(s)M^*_{n,kl}(P,s)]d\Gamma$$
$$+\sum_A[\dot{R}(s_A)w^*_{,kl}(P,s_A)$$

$$- \dot{w}(s_A) R^*_{;kl}(P,s_A)] + \int_\Omega \dot{q}(Q) w^*_{;kl}(P,Q) d\Omega$$

$$+ \int_\Omega [\dot{v}^*]_{,kl} [D] \{\dot{x}\}^P d\Omega \qquad (9.139)$$

（三）样条边界元法

如果采用域外奇点来建立样条边界元法的计算格式，$C(P) = 0$。如果将整个边界分为M个区域，则式（9.135）可变为

$$\sum_{m=1}^{M} \dot{\Pi}_{km}(P,s) + \dot{T}_k(P) + \dot{F}_k(P) + \dot{S}_k(P) = 0 \qquad (9.140)$$

式中
$$\dot{\Pi}_{km}(P,s) = \int_{\Gamma_m} [w^*_k(P,s)\dot{V}_n(s) - \theta^*_k(P,s)\dot{M}_n(s) - V^*_{nk}(P,s)\dot{w}(s) + M^*_{nk}(P,s)\dot{\theta}(s)] d\Gamma \qquad (9.141)$$

式（9.141）的离散有五种方法，这些方法在第五章（§5.4）已有介绍，本节只简单地介绍两种方法：

1．第一种方法

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则

$$s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_z \qquad z = N_m$$

$$s_i = s_0 + i h_m \qquad h_m = s_{i+1} - s_i = l_m / z$$

则
$$\dot{\Pi}_{km}(P,s_i) = \sum_{i=0}^{z} \lambda_i [w^*_k(P,s_i)\dot{V}_n(s_i) - \theta^*_k(P,s_i)\dot{M}_n(s_i) - V^*_{nk}(P,s_i)\dot{w}(s_i) + M^*_{nk}(P,s_i)\dot{\theta}(s_i)] h_m \qquad (9.142)$$

将式（6.142）代入式（9.140）可得：

$$\sum_{m=0}^{M}\dot{\Pi}_{km}(P,s_i)+\dot{T}_k(P)+\dot{F}_k(P)+\dot{S}_k(P)=0 \quad (9.144)$$

如果将塑性区分为E个单元，则

$$\dot{S}_k(P)=\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega_e}[x^*]_k[D]\{\dot{x}\}^P d\Omega \qquad (9.144)$$

2. 第二种方法

设 $\dot{w}(s)=\sum_{i=0}^{z}\dot{w}_i\phi_i(s)$，$\dot{\theta}(s)=\sum_{i=0}^{z}\dot{\theta}_i\phi_i(s)$

$$\dot{V}_n(s)=\sum_{i=0}^{z}\dot{V}_i\phi_i(s),\quad \dot{M}_n(s)=\sum_{i=0}^{z}\dot{M}_i\phi_i(s)$$

则式（9.141）可变为

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}_{km}(P,s)=\sum_{i=0}^{z}\Big[&\Big(\int_{\Gamma_m}w_k^*(P,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)\dot{V}\\&-\Big(\int_{\Gamma_m}\theta_k^*(P,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)\dot{M}_i\\&-\Big(\int_{\Gamma_m}V_{nk}^*(P,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)\dot{w}_i\\&+\Big(\int_{\Gamma_m}M_{nk}^*(P,s)\phi_i(s)d\Gamma\Big)\dot{\theta}_i\Big]\end{aligned} \qquad (9.145)$$

式中

$$\sum_{i=0}^{z}\int_{\Gamma_m}F(P,s)d\Gamma=\sum_{i=0}^{z-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}}F(P,s)d\Gamma$$

注意，P在虚边界上。

式（9.143）与边界条件有关。在式（9·143）中引入边界条件后，并将式（9.144）代入，可得：

$$[A]\{\dot{X}\}=\{\dot{f}\}+[S]\{\dot{x}^{P}\} \tag{9.146}$$

同样由式（9.138）和式（9.139）可得：

$$\{\dot{M}\}=-[\widetilde{A}]\{\dot{X}\}+\{\dot{\widetilde{f}}\}+[\widetilde{S}]\{\dot{x}^{P}\} \tag{9.147}$$

区域Ω内任一点的挠度增量由式(9.135)决定。由式(9.135)可得：

$$\{\dot{w}\}=[\overline{A}]\{\dot{X}\}+\{\dot{\overline{f}}\}+[\overline{S}]\{\dot{x}^{P}\} \tag{9.148}$$

由式（9.146）可得：

$$\{\dot{X}\}=[Q]\{\dot{x}^{P}\}+\{\dot{P}\} \tag{9.149}$$

式中 $[Q]=[A]^{-1}[S]$， $\{\dot{P}\}=[A]^{-1}\{\dot{f}\}$ (9.150)

将式（9.149）代入式（9.147）可得：

$$\{\dot{M}\}=[\widetilde{Q}]\{\dot{x}^{P}\}+\{\dot{M}\}^{e} \tag{9.151}$$

式中 $[\widetilde{Q}]=[\widetilde{S}]-[\widetilde{A}][Q]$

$$\{\dot{M}\}^{e}=\{\dot{\widetilde{f}}\}-[\widetilde{A}]\{\dot{P}\} \tag{9.152}$$

由上述可知，计算弯矩及扭矩时，只用式（9.151）就行了。利用式（9.151）求出$\{\dot{x}^{P}\}$后，即可利用式（9.149）求出边界未知量增量的参数向量$\{\dot{X}\}$。求解的方法有迭代法和拟线性解法，本节只介绍拟线性解法。

（四）拟线性解法

式（9.151）可以写成下列形式：

$$\{\dot{M}\}=\{\dot{M}\}^{e}+\{\dot{M}\}^{p} \tag{9.153}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\{\dot{M}\}^{e}&=\{\dot{\tilde{f}}\}-[\tilde{A}]\{\dot{P}\}\\ \{\dot{M}\}^{p}&=[\tilde{Q}]\{\dot{\chi}^{p}\}\end{aligned}\right\} \tag{9.154}$$

将式（9.149）代入式（9.148）可得：

$$\{\dot{w}\}=\{\dot{w}\}^{e}+\{\dot{w}\}^{p} \tag{9.155}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\{\dot{w}\}^{e}&=\dot{\bar{f}}\}+\{\bar{A}\}\{\dot{P}\}\\ \{\dot{w}\}^{p}&=[\bar{Q}]\{\dot{\chi}^{p}\}\\ [\bar{Q}]&=[\bar{S}]+[\bar{A}][Q]\end{aligned}\right\} \tag{9.156}$$

根据塑性理论，对于进入屈服阶段的单元，其应力满足屈服条件：

$$f(M,\ M_{0})=\overline{M}^{2}-M_{0}^{2}=0 \tag{9.157}$$

在加载阶段，它满足下列一致性条件：

$$df=\frac{\partial f}{\partial M}dM+\frac{\partial f}{\partial M_{0}}dM_{0}=0 \tag{9.158}$$

根据塑性增量理论可知：

$$d\chi^{p}=c\frac{\partial f}{\partial M} \tag{9.159}$$

将式（9.155）、式（9.156）和式(9.159)代入式（9.158）可得：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)^{T}[\widetilde{Q}]\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)+\frac{\partial f}{\partial M_0}dM_0+\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)^{T}dM^{e}=0 \tag{9.160}$$

对于硬化材料，式中dM_0为

$$dM_0=cH\frac{\partial f}{\partial M_0} \tag{9.161}$$

如果对塑性区划分网格，则式（9.160）可变为

$$\sum_{j=1}^{E}\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)_i[\widetilde{Q}_{ij}]\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)_j c_j+\left(\frac{\partial f}{\partial M_0}\right)_i^2 H_i c_i$$

$$=-\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)_i dM_i^e \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ E \tag{9.162}$$

由式（9.162）可得：

$$[G]\{c\}=\{g\} \tag{9.163}$$

利用式（9.163)求出c_j值后，即可利用式（9.159）求出在此荷载增量下所产生的塑性变形增量$d\chi^p$，利用式（9.154）求出总弯矩增量$d\{M\}$。由上述可得：

$$\left.\begin{aligned}\{w\}_{n+1}&=\{w\}_n+d\{w\}_{n+1}\\ \{M\}_{n+1}&=\{M\}_n+d\{M\}_{n+1}\end{aligned}\right\} \tag{9.164}$$

§9.7 计算例题

【例9.1】 图9.5为厚壁圆筒的横截面，受均布内压p，材料和几何参数为$E=2.1\times10^4 dN/mm^2$，$\mu=0.3$，$\sigma_0=24dN/mm^2$，$H=0$，$r_2=2r_1$，$r_1=100mm$，求它的弹塑性解。

由于轴对称，取四分之一进行计算，图9.6为边界分划及区域分划，计算结果见图9.7。由此可知，样条边界元法的结果与解析解非常接近。

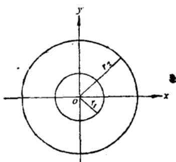


图9.5

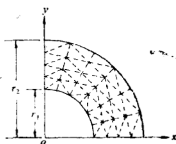


图9.6

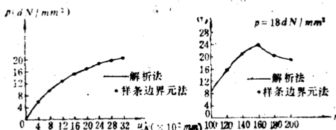


图9.7

【例9.2】 图9.8为一块开孔铅板，受单向均布拉力，$E=0.7\times10^4kg/mm^2$，$\sigma_0=24.3kg/mm^2$，$H=0.032E$，$\mu=0.2$，求它的弹塑性解。

由于对称，本例取四分之一进行计算（图9.9），计算结果见图9.10。

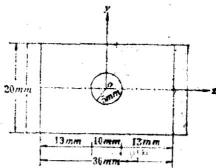


图9.8

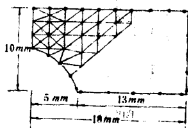


图9.9

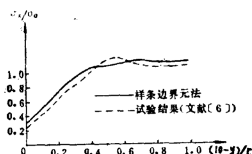


图9.10

【例9.3】 图9.11为四边简支薄板，受均布荷载q，$a=23cm$，$b=15cm$，厚度$t=1cm$，$q=535T/m^2$，$\mu=0.3$，$E=1\times10^6 kg/cm^2$，$H=0.055E$，$\sigma_s=4400\ kg/cm^2$，求它的弹塑解。

本例的屈服条件为

$$f(M, M_0)=M_x^2-M_xM_y+M_y^2+3M_{xy}^2-M_0^2 \quad (9.165)$$

利用样条边界元法求得的结果见图9.12($y=b/2$处的挠度)及表9.1。

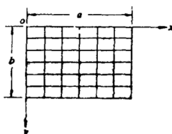


图9.11

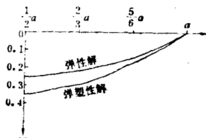


图9.12

表9.1　　　　　　　　例9.3的计算结果

F.S. / (x, y)	w (cm)	$\sigma_x(kg/cm^2)$	$\sigma_y(kg/cm^2)$
a/6, b/6	0.085	2454	3271
a/3, b/6	0.1490	3217	4682
a/2, b/6	0.1710	3427	5104
a/6, b/3	0.1500	3778	4694
a/3, b/3	0.2100	4227	5924
a/2, b/3	0.3000	4271	6361
a/6, b/2	0.1840	4231	5194
a/3, b/2	0.3040	4394	6240
a/2, b/2	0.3500	4424	6481

表中σ_x及σ_y为应力分量。

参 考 文 献

［1］秦荣，弹塑性问题的样条边界元法，广西大学，1985年。

［2］Qin Rong（秦荣），Spline Boundry Element Method for Elasto-Plastic Analysis of Thin Plates，第八届国际边界元法会议论文，1986年，日本东京。

［3］王仁，熊祝华，黄文彬，塑性力学基础，科学出版社，1982年。

［4］徐秉业，陈森灿，塑性理论简明教程，清华大学出版社，1981年。

[5]楼志文，杨物华，弹塑性边边元法拟线性解，力学学报，1(1986)。

[6]田中正隆，田中喜久昭，境界婆素法——基础及应用(日文)，凡善株会社，1982年。

[7]秦荣，弹塑性问题的样条加权残数法，第二届全国加权残会议论文，1986年，杭州。

[8]秦荣，板壳弹塑性问题样条有限点法，第二届全国塑性力学学术交流会论文，3—25—72，1988年，合肥。

[9]C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, Bo undary Element Techniques, 1984年，英国。

[10]岑章志、王勤成、杜庆华，三维弹塑性分析的边界元法，全国第一届工程中的边界元法会议论文集，1985年。

第十章 耦合法

各种方法都有自己的优缺点，在实际工作中可以将各种方法联合应用。例如，有限元——样条边界元法；解析解——样条边界元法；样条边界元——能量配点法。这样可以扬长避短，发扬各种方法的优势。杂交出优势。

本章主要介绍几种耦合法的基本原理及方法。

§10.1 有限元——样条边界元法

本节以弹性力学平面问题为例。图10.1由区域Ω_1及区域Ω_2组成的区域Ω，这两个区域在交界面上的连续条件为

$$u_B = u_E,\quad p_B + p_E = 0 \tag{10.1}$$

我们用样条边界元法分析区域Ω_1，用有限元法分析区域Ω_2（图10.2），然后利用式（10.1）所示的连续条件将两者耦合起来进行求解，这种方法称为有限元——样条边界元法。

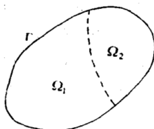


图10.1

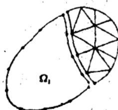


图10.2

对于区域Ω_2，利用有限元法可得：

$$[G]\{u\} = \{R\} + \{F\} \tag{10.2}$$

式中$[G]$为区域Ω_2的刚度矩阵；$\{u\}$为区域Ω_2的结点位移列阵；$\{R\}$和$\{F\}$为区域Ω_2的结点荷载列阵，前者对应于面力，后者对应于体力。

对于区域Ω_1，利用样条边界元法可得：

$$[H]\{u\} = [K]\{p\} + \{B\} \tag{10.3}$$

或

$$[A]\{u\} = \{p\} + \{f\} \tag{10.4}$$

式中

$$[A] = [K]^{-1}[H], \quad \{f\} = [K]^{-1}\{B\} \tag{10.5}$$

其中$\{u\}$为区域Ω_1的边界结点位移列阵，$\{p\}$为区域Ω_1的边界结点面力列阵，$\{B\}$为区域Ω_1的体力项。

由于$\{R\}$中的分量是结点集中力，$\{p\}$中的分量是分布面力在结点上的值，两者不同。如果利用式(10.2)及式(10.3)联合求$\{u\}$，则必须将$\{R\}$或$\{p\}$进行变换。即

$$\{R\}_B = [M]\{p\} \tag{10.6}$$

式中$\{R\}_B$为等价的结点集中力列阵；$[M]$为面力转换矩阵，可按文献[6]的方法建立。

由式(10.4)可得：

$$[G]_B\{u\}_B = \{R\}_B + \{F\}_B \tag{10.7}$$

式中

$$[G]_B = [M][A], \quad \{F\}_B = [M]\{f\} \tag{10.8}$$

其中$\{u\}_B$为区域Ω_1的边界结点位移列阵。

由式(10.7)可知，可以将边界元作为有限元法中的一个单元，因此利用式(10.2)、式(10.7)和式(10.1)可求出位移向量。关于这一点的具体做法，就是利用式(10.1)所示的两个区域交界面上的连续条件将式(10.2)和式(10.7)装配(耦合)起来进行求解。

这种方法可以推广到各个领域中去应用。

§10.2 样条边界元——能量配点法

本节以水库为例，介绍一个求解流——固耦合作用的方法。

先用样条边界元法分析水体，用样条能量配点法分析坝体，然后将两者耦合起来进行求解，这种方法称为样条边界元——能量配点法，详见文献[1]至文献[5]。

（一）样条边界元法分析动水压力

当坝体作微幅谐振时，动水压力满足下列微分方程及边界条件：

$$\nabla_2 p + k^2 p = 0 \qquad \in \Omega \tag{10.9}$$

$$\left.\begin{aligned} p &= \bar{p} && \in \Gamma_p \\ q &= \bar{q} && \in \Gamma_q \end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

式中n为边界向外法线（见第三章）。

根据样条边界元法的原理可得[2]：

$$\{R\} = \sum_{m=1}^{M} ([H]_m\{p\}_m - [K]_m\{q\}_m) \tag{10.11}$$

式中 $\{p\}_m = [p_0 \ \ p_1 \ \ p_0 \ \cdots \ p_Z]_m^T$

$\{q\}_m = [q_0 \ \ q_1 \ \ q_2 \ \cdots \ q_Z]_m^T$

$$\left.\begin{aligned} [H]_m &= [C]_m^B - [q^*]_m[\lambda]_m h_m \\ [K]_m &= [p^*]_m[\lambda]_m h_m \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

$$[\lambda]_m = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_Z) \tag{10.13}$$

$$\left.\begin{aligned} [q^*]_m &= [q^*(s_j, s_i)]_m \\ [p^*]_m &= [p^*(s_j, s_i)]_m \end{aligned}\right\} \begin{aligned} i &= 0,1,2,\cdots,N_m \\ j &= 0,1,2,\cdots,N \end{aligned} \tag{10.14}$$

$$[C]_m = \mathrm{diag}(C_0, C_1, C_2, \cdots C_z) \tag{10.15}$$

所有记号与第三章相同，$z = N_m$。

当边界未知量用三次B样条函数来逼近时，则有

$$p(s) = [\phi(s)]\{a\}_m \quad q(s) = [\phi(s)]\{b\}_m \tag{10.16}$$

将式（10.16）代入式（10.11）便得：

$$\{R\}=[H]\{a\}-[K]\{b\} \quad (10.17)$$

式（10.17）与边界条件有关，引入边界条件后可得

$$\{R\}=[A]\{X\}-\{f\} \quad (10.18)$$

利用配点法可得：

$$[A]\{X\}=\{f\} \quad (10.19)$$

利用式（10.19）即可求出坝体上的动水压力[14]。

（二）样条能量配点法分析坝体

本节以重力坝为例，将它简化为一个变截面的悬臂梁（图10.3）来分析，因为这个梁矮胖，因此计算时，不仅要考虑弯曲变形的影响，而且还要计入剪切变形的影响。

如果不考虑振动的阻尼，则梁横向振动的能量泛函为

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^H\left[D\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2+C\left(\frac{dw}{dy}-\psi\right)^2-\rho_2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2-2pw\right]dydt \quad (10.20)$$

式中 $w=w(y,t)$——梁的挠度；

$\psi=\psi(y,t)$——梁横截面的转角；

$p=p(y,t)$——梁上的横向荷载；

t——时间，$t_1\leqslant t\leqslant t_2$；

$D=EI$——梁横截面抗弯刚度；

C——梁矩形截面的剪切刚度，即

$$C=\frac{10(1+\mu)}{12+11\mu}GA \quad (10.21)$$

μ——泊松系数；　$\rho_2=\rho_1 A$——单位长度质量；

G——抗剪模量；ρ_1——材料容重。

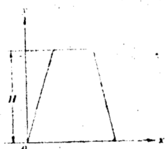


图10.3

设
$$\left.\begin{aligned} w &= [\phi]\{A\} = \sum_{i=0}^{N+1}\phi_i(y)A_i(t) \\ \psi &= [\phi]\{B\} = \sum_{i=0}^{N+1}\phi_i(y)B_i(t) \end{aligned}\right\} \quad (10.22)$$

式中 $A_0 = w_0 \qquad B_0 = \psi_0$

$$\{A\} = [w_0 \ A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_{N+1}]^T$$
$$\{B\} = [\psi_0 \ B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_{N+1}]^T$$
$$[\phi] = [\phi_0 \ \phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_{N+1}]$$

$$\phi_0(y) = 3\varphi_3\left(\frac{y}{h}\right) - 6\varphi_3\left(\frac{y}{h} + 1\right)$$

$$\phi_1(y) = \varphi_3\left(\frac{y}{h} - 1\right) - \frac{1}{4}\varphi_3\left(\frac{y}{h}\right)$$

$$\phi_i(y) = \varphi_3\left(\frac{y}{h} - i\right), \quad i = 2, 3, \cdots, N+1 \qquad (10.23)$$

将式(10.22)代入式(10.20)可得：

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^H [\{B\}^T[\phi']^T D[\phi']\{B\} - ([\phi']\{A\}$$
$$- [\phi]\{B\})^T C([\phi']\{A\} - [\phi]\{B\})$$

$$-2p\{A\}^T[\phi]^T-\rho_2\{A\}^T[\phi]^T[\phi]\{A\}]\,dydt \tag{10.24}$$

如果在梁作N等分，利用能量配点法，则式（10.24）可变为

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}[\{A\}^T[K_{11}]\{A\}+\{B\}^T[K_{22}]\{B\}$$
$$-2\{A\}^T[K_{12}]\{B\}-2\{A\}^T[g]^T[\lambda]\{p\}$$
$$-\{A\}^T[M]\{\ddot{A}\}]\,hdt \tag{10.22}$$

式中
$$\left.\begin{array}{l}[M]=[g]^T[\lambda][\rho_2][g]\\ [K_{11}]=[g']^T[\lambda][C][g']\\ [K_{12}]=[g']^T[\lambda][C][g],\ [K_{21}]=[K_{12}]^T\\ [K_{22}]=[g'][\lambda][d][g']+[g]^T[\lambda][C][g]\end{array}\right\} \tag{10.16}$$

$$\{p\}=[p(y_0,t)\ \ p(y_1,t)\ \cdots\ p(y_N,t)]^T \tag{10.27}$$
$$[\lambda]=\mathrm{diag}(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_N)$$

$$\left.\begin{array}{l}[C]=\mathrm{diag}(C_0,\ C_1,\ C_2\cdots,\ C_N)\\ [d]=\mathrm{diag}(D_0,\ D_1,\ D_2\cdots D_N)\\ [\rho_2]=\mathrm{diag}[\rho_2(y_0),\rho_2(y_1)\cdots,\rho_2(y_N)]\\ D_j=D(y_j),\ C=C(y_j)\ \ j=0,\ 1,2,\cdots,N\end{array}\right\} \tag{10.28}$$

$$\lambda_j=\begin{cases}1/3, & j=0,\ N\\ 2/3, & j=2,\ 4,\ \cdots,\ N-2\\ 4/3, & j=1,\ 3,\ \cdots,\ N-1\end{cases}\quad N\text{为偶数} \tag{10.29}$$

$$[g]=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & & & & \\ 3 & 3.75 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1\end{bmatrix}_{(N+1)(N+2)}$$

$$
[g'] = \frac{1}{4h}\begin{bmatrix} 12 & 2 & 0 & & & & \\ -6 & 0.5 & 2 & & & 0 & \\ & 0 & -2 & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & -2 & 0 & 2 & \\ & & & & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(N+2)(N+1)}
$$

对式（10.25）进行变分可得：

$$
\begin{aligned}
&[K_{11}]\{A\} - [K_{12}]\{B\} + [M]\{\ddot{A}\} \\
&\quad - [g]^T[\lambda]\{p\} = 0 \qquad (10.30) \\
&[K_{22}]\{B\} - [K_{21}]\{A\} = 0 \qquad (10.31)
\end{aligned}
$$

由式（10.30）和式（10.31）可得：

$$
[M]\{\ddot{A}\} + [K]\{A\} = \{P\} \qquad (10.32)
$$

式中 $\left.\begin{aligned}[K] &= [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] \\ \{P\} &= [g]^T[\lambda]\{p\}\end{aligned}\right\}$ （10.33）

（三）库水与坝体的耦合动力方程

当发生地震时，坝体的动力方程为

$$
[M]\{\ddot{A}_a\} + [K]\{A\} = \{P\} \qquad (10.34)
$$

式中 $\{\ddot{A}_a\}$ 为与坝体绝对加速度有关的参数。坝体的绝对加速度 $\ddot{w}_a$ 等于地面加速度 $\ddot{w}_g$ 加上坝体相对于地面的加速度 $\ddot{w}$，即

$$
\{\ddot{w}_a\} = \{\ddot{w}_g\} + \{\ddot{w}\} \qquad (10.35)
$$

式中 $\{\ddot{w}_a\} = [g]\{\ddot{A}_a\}$，$\{\ddot{w}_g\} = [g]\{\ddot{A}_g\}$，$\{\ddot{w}\} = [g]\{\ddot{A}\}$

（10.36）

由此可得： $\{A_a\}=\{\ddot{A}_g\}+\{\ddot{A}\}$ （10.37）

将式（10.37）代入式（10.34）便得：

$$[M]\{\ddot{A}\}+[K]\{A\}=\{P\}-[M]\{\ddot{A}_g\} \qquad (10.38)$$

其中 $\{P\}$ 为动体压力的等效结点荷载。由式（10.19）可得坝面上的动水压力[14]：

$$\{p\}=-\rho[G]\{\ddot{w}_a\}=-\rho[G](\ddot{w}_g+\ddot{w}) \qquad (10.39)$$

式中ρ为水的容重。将式（10.39）代入式（10.33）可得：

$$\{P\}=-[M_p](\{\ddot{A}_g\}+\{\ddot{A}\}) \qquad (10.40)$$

式中 $$[M_p]=[g]^T[\lambda]\rho[G][g] \qquad (10.41)$$

将式（10.40）代入式（10.38）可得：

$$[\overline{M}]\{\ddot{A}\}+[K]\{A\}=-[\overline{M}]\{\ddot{A}_g\} \qquad (10.42)$$

式中 $$\{\overline{M}\}=[M_p]+[M] \qquad (10.43)$$

由式（10.42）可以看出，考虑水体与结构的共同作用时，动力方程的形式不变，只是在质量矩阵 $[M]$ 上加了附加矩阵 $[M_p]$。

（四）坝体动力特性的计算

当坝体自由振动时，令式（10.34）等号右边等于零，即

$$[M]\{\ddot{A}\}+[K]\{A\}=\{0\} \qquad (10.44)$$

设 $\{A\}=\{A^*\}\sin(\omega t+\alpha)$，则式（10.44）便得：

$$([K]-\omega^2[M])\{A^*\}=\{0\} \qquad (10.45)$$

式（10.45）是一个齐次方程，因为在自由振动时，坝体各点的振幅不全为0，则 $\{A\} \neq \{0\}$。因此式（10.45）括号内矩阵的行列式等于0，由此可得坝体自振频率方程为

$$|[K]-\lambda[M]|=0 \tag{10.46}$$

式中　$\lambda=\omega^2$

式（10.46）是λ的M次代数方程式，由此可求出M个自振频率。对于每个自振频率，由式(10.45)可求出相应的一个 $\{A\}$。当 $\{A\}$ 确定后，由式（10.22）可求出一个相应的振型。

式中λ称为特征值。因此求解空库时坝体自由振动问题可归结为求解广义特征值问题：

$$[K]\{A\}=\lambda[M]\{A\} \tag{10.47}$$

对于满库时坝体的自振特性求解，只要把式（10.47）中的 $[M]$ 换为 $[\overline{M}]$ 就行了．其余做法与空库情况相同。计算结果详见文献［3］。

（五）坝体地震动力反应的样条函数方法[8]

因为前面已求得了坝体的自振特性，因此本节用振型迭加法求解坝体的地震动力反应。

求解一个n自由度结构的动力反应问题，可归结为求解下列的微分方程组：

$$[M]\{\ddot{W}\}+[C]\{\dot{W}\}+[K]\{W\}=\{P\} \tag{10.48}$$

式中 $[M]$、$[C]$ 和 $[K]$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵及刚度矩阵，都是n阶的；$\{W\}$ $\{\dot{W}\}$、和 $\{\ddot{W}\}$ 分别表示n维位移向量、速度向量和加速度向量；P是n维干扰力向量，它们都是

时间t的函数。

由式（10.48）可得振型迭加法的基本方程：

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = X_i P \qquad i = 1,2,\cdots,n \quad (10.49)$$

式中X_i为第i个规格化的振型向量，ω_i是与第i个振型对应的无阻尼自振频率，ξ_i为第i个振型对应的阻尼比。利用式（10.49）可以确定结构的动力反应，详见文献［7］至文献［15］，坝体地应震动力反应的计算结果见文献［3］和文献［15］。

计算结果表明，利用样条边界元——能量配点法求解库水与坝体的动力耦合问题，是一个经济有效的方法，值得推广使用。

§10.3 差分法与样条边界元法联合应用

本节以瞬态扩散问题为例。瞬态扩散定解问题为

$$\nabla^2 u(x, t) - \frac{1}{k}\frac{\partial(x, t)}{\partial t} = 0 \qquad \in \Omega \quad (10.50)$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}(x, t) \qquad \in \Gamma_u \\ q(x, t) &= \bar{q}(x, t) \qquad \in \Gamma_q \end{aligned}\right\} \quad (10.51)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x) \qquad \in \Omega \quad (10.52)$$

如果取一个足够小时间增量Δt，则有

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t) - u(x, t-\Delta t)}{\Delta t} \quad (10.53)$$

将式（10.53）代入式（10.50）可得：

$$\nabla^2 u(x, t+\Delta t) - \frac{1}{k\Delta t}u(x, t+\Delta t)$$

$$+\frac{1}{k\Delta t}u(x, t) = 0 \quad (10.54)$$

利用加权残数法可得下列边界积分方程：

$$C(P)u(P, t+\Delta t)+\int_{\Gamma} q^{*}(P, Q_{0})u(Q_{0}, t+\Delta t)\,d\Gamma$$

$$=\int_{\Gamma} u^{*}(P, Q_{0})q(Q_{0}, t+\Delta t)\,d\Gamma$$

$$+\frac{1}{k\Delta t}\int_{\Omega} u^{*}(P, Q)u(Q, t+\Delta t)\,d\Omega \qquad (10.55)$$

式中u^*为基本解，满足下列方程：

$$\nabla^{2}u^{*}-\frac{1}{k\Delta t}u^{*}+\delta(P, Q)=0 \qquad (10.56)$$

由此可得：

$$u^{*}=\frac{1}{2\pi}N_{0}\left(\sqrt{\frac{1}{k\Delta t}}\,r\right) \qquad \text{（二维问题）} \qquad (10.57)$$

$$q^{*}=\partial u^{*}/\partial n \qquad (10.58)$$

式中N_0为零阶第二类Bessel函数。

利用样条边界元法可得：

$$[H]\{u\}_{\tau}=[K]\{q\}_{\tau}+[S]\{\tilde{u}\}_{t} \qquad (10.59)$$

式中 $\{\tilde{u}\}_{\tau}=[\tilde{K}]\{q\}_{\tau}-[\tilde{H}]\{u\}_{\tau}+[S]\{\tilde{u}\}_{t} \qquad (10.60)$

$$\tau=t+\Delta t$$

其中$\{u\}$为边界值，而$\{\tilde{u}\}$为域内值。

由式（10.59）和式（10.60）可进行递推计算，具体计算步骤为

（1）由初始条件可得$\{\bar{u}\}_{t_0}$，将它连同边界条件代入式

(10.59)可得u_{τ_0}及q_{τ_0}。$\tau_0 = t_0 + \Delta t$。

(2)将$\{u\}_{\tau_0}$、$\{q\}_{\tau_0}$和$\{\tilde{u}\}_{t_0}$代入式(10.60)可得$\{\tilde{u}\}_{\tau_0}$。

(3)重复上述步骤(1)和(2),直到误差达到允许范围为止。一般$\tau_i = t_0 + (i+1)\Delta t$。

这个方法可以推广去求解瞬态振动问题、地下水流动及流体动力学问题。

参考文献

[1] 秦荣,样条边界元——能量配点法,广西大学,1984年。

[2] 秦荣,王战营,样条边界元法解动水压力,西南四省一市计算力学学术会议,1987年。

[3] 秦荣,王战营,样条函数法解水与坝体共同作用的动力特性,中南及西南九省计算力学学术会议论文集,1957年。

[4] 秦荣、王战营,水——坝耦合问题的计算方法及其程序,全国第二届结构计算及CAD软件学术会议,1987年。

[5] 秦荣,能量配点法及其应用,《工程力学》,1(1984)。

[6] 田中正隆,田中喜久昭,境界要素法——基础及应用(日文),丸善株式会社,1982年。

[7] 秦荣,结构力学的样条函数方法,广西人民出版社,1985年。

[8] 秦荣,结构动力问题的样条函数方法,全国第一届

计算物理学术会议论文集，1982年；广西大学学报，1（1983），91—102。

［9］ 秦荣，求解结构动力反应的样条函数方法，《工程力学》，2（1985）。

［10］ Qin Rong（秦荣），Qin Jun（秦俊），Spline Function Method for Dynamic Response，第一次世界计算力学大会论文集，1986年，美国。

［11］ 秦荣，王战营，水与坝的耦合作用问题，广西力学学会论文．1987年12月。

［12］ 秦荣，样条边界元——子域法，广西大学，1986年。

［13］ 秦荣，解析解——样条边界元法，广西大学，1986年。

［14］ Qin Rong，Fundamental and Applications of Spline Boundary Element—Energy Collocatisn Method，中日两国边界元法学术会议论文集（英文版），1988年。

［15］ 秦荣，王战营，样条函数方法解坝体的地震动力反应，《水利学报》，1988年。

第十一章 热传导的样条边界元法

由于温度不均匀，热量从温度高的地方向温度低的地方转移，这种现象叫做热传导。热传导现象普遍发生在自然界，它在现代化建设中有重要作用。

本章主要介绍热传导问题的样条边界元法，它对扩散问题和渗流问题也适用。

§11.1 基本方程

热传导方程可以写成下列形式：

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z})+p \qquad (11.1)$$

式中u为温度，c为热容量，ρ为材料密度，k为热传导系数，p为热源；$u=u(Q,t)$，$p=p(Q,t)$，t为时间。

对于均质各同性的物体，热传导系数k是一个常数，式(11.1)可变为

$$k\nabla^2u-c\rho\frac{\partial u}{\partial t}+p=0 \qquad (11.2)$$

由此可得：

$$\nabla^2u-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}+P=0 \qquad (11.3)$$

式中 $\gamma=k/c\rho \qquad P=p/k \qquad (11.4)$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &u=\bar{u} && \text{on } \Gamma_u \\ &q=\bar{q} && \text{on } \Gamma_q \\ &q=A(\bar{u}-u) && \text{on } \Gamma_A=\Gamma-\Gamma_u-\Gamma_q \end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

初始条件为

$$u(Q,\ t_0)=u_0(Q) \qquad Q\in\Omega \tag{11.6}$$

式中 $q=k\partial u/\partial n$ （11.7）

A为放热系数。当$P=0$时，则式（11.3）便变为

为 $$\nabla^2 u-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{11.8}$$

这个方程与扩散方程的形式相同。

由上述可知，式（11.3）不仅对热传导问题适用，而且也可用于扩散问题[2]。

§11.2 样条边界元法

（一）边界积分方程

如果式（11.3）两边乘上基本解$u^*(P,Q)$，则有

$$\int_\Omega\left(\nabla^2 u-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}+P\right)u^* d\Omega=0 \tag{11.9}$$

式中基本解u^*与时间无关，与第三章相同。

利用分部积分法，则式（11.9）可变为

$$C(P)u(P,\ t)-\int_\Gamma[u^*(P,\ Q_0)q(Q_0,\ t)$$

$$-q^{*}(P,\ Q_{0})u(Q_{0},\ t)]d\Gamma$$

$$=\int_{\Omega}P(Q,\ t)u^{*}(P,\ Q)d\Omega$$

$$-\int_{\Omega}\frac{1}{\gamma}u^{*}(P,\ Q)\dot{u}(Q,\ t)d\Omega \tag{11.10}$$

式(11.10)不仅含有边界未知量，而且还含有域内未知量。为了把域内积分化为边界积分，设

$$\dot{u}(Q,\ t)=\sum_{e=0}^{Z}g^{e}(Q)\dot{\alpha}^{e}(t) \tag{11.11}$$

则 $$D=\int_{\Omega}\frac{1}{\gamma}u^{*}\dot{u}\,d\Omega=\sum_{e=0}^{Z}\dot{\alpha}^{e}\int_{\Omega}\frac{1}{\gamma}g^{e}u^{*}d\Omega \tag{11.12}$$

设 $g^{e}=\nabla^{2}\psi^{e}$ $\qquad in\ \Omega$ (19.13)

则 $$D=\sum_{e=0}^{Z}\dot{\alpha}^{e}\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}(\nabla^{2}\psi^{e})u^{*}d\Omega \tag{11.14}$$

式中 $$\int_{\Omega}(\nabla^{2}\psi^{e})u^{*}d\Omega=-C\psi^{e}+\int_{\Gamma}(q^{*}\psi^{e}-u^{*}\eta^{e})d\Gamma \tag{11.15}$$

$\dot{u}=\partial u/\partial t$ $\qquad \dot{\alpha}=\partial\alpha/\partial t$

$\eta^{e}=\partial\psi^{e}/\partial n$

将式(11.14)代入式(11.10)可得：

$$Cu-\int_{\Gamma}(u^{*}q-q^{*}u)d\Gamma=\sum_{e=0}^{Z}\frac{1}{\gamma}[C\psi^{e}$$

$$-\int_{\Gamma}(u^{*}\eta^{e}-q^{*}\psi^{e})d\Gamma]\dot{\alpha}^{e}+\int_{\Omega}Pu^{*}d\Omega \tag{11.16}$$

这就是热传导问题的边界积分方程，式中区域积分可以化为边界积分。

（二）三次样条边界元法

本节以平面问题为例。如果将整个边界Γ分为M个部分，则式（11.16）可变为

$$C(P_0)u(P_0,t)-\sum_{m=1}^{M}\Pi_m(P_0,s,t)$$

$$=\sum_{e=0}^{Z}\frac{1}{\gamma}[C(P_0)\psi^e(P_0)$$

$$-\sum_{m=1}^{M}\Pi_m^e(P_0,s)]\dot{\alpha}^e+f(P_0) \quad (11.17)$$

式中 $$f(P_0)=\int_{\Omega}u^*(P_0,Q)P(Q)d\Omega \quad (11.18)$$

$$\Pi_m(P_0,s,t)=\int_{\Gamma_m}[u^*(P_0,s)q(s,t)$$

$$-q^*(P_0,s)u(s,t)]d\Gamma \quad (11.19)$$

$$\Pi_m^e(P_0,s)=\int_{\Gamma_m}[u^*(P_0,s)\eta^e(s)$$

$$-q^*(P_0,s)\psi^e(s)]d\Gamma \quad (11.20)$$

其中s为边界Γ的弧坐标，t为时间。式（11.18）可以化为边界积分。

利用式（11.17）可以建立热传导问题样条边界元法的计算格式。对式（11.19）和式（11.20）的离散有五种方法，本节只介绍第三种方法。

如果将边界Γ_m分为N_m等分，则

$$
\left.\begin{aligned}
u(s,t) &= \sum_{i=0}^{z}\phi_i(s)u_i(t) \\
q(s,t) &= \sum_{i=0}^{z}\phi_i(s)q_i(t)
\end{aligned}\right\} \tag{11.21}
$$

式中$z=N_m$，$\phi_i(s)$采用第一章式（1.27）的形式；$u_i=u(s_i,t)$，$q_i=q(s_i,t)$。将式（11.21）代入式（11.19）和式（11.20）可得：

$$
\Pi_m(P_0,s,t)=\sum_{i=0}^{z}\left[\left(\int_{\Gamma_m}u^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)q_i - \left(\int_{\Gamma_m}q_*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)u_i\right] \tag{11.22}
$$

$$
\Pi_m^e(P_0,s)=\sum_{i=0}^{z}\left[\left(\int_{\Gamma_m}u^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)\eta_i^e - \left(\int_{\Gamma_m}q^*(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)\psi_i^e\right] \tag{11.23}
$$

式中 $\psi_i^e=\psi^e(s_i)$ $\qquad$ $\eta_i^e=\eta^e(s_i)$ $\qquad$ （11.24）

式（11.20）也可以写成下列形式：

$$
\Pi_m^e(P_0,s)=\sum_{i=0}^{z}\left[\left(\int_{\Gamma_m}u^*(P_0,s)\eta^e(s)d\Gamma\right) - \left(\int_{\Gamma_m}q^*(P_0,s)\psi^e(s)d\Gamma\right)\right] \tag{11.25}
$$

式中$\sum_{i=0}^{z}\int_{\Gamma_m}F(P_0,s)\,d\Gamma=\sum_{i=0}^{z-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}}F(P_0,s)d\Gamma$ （11.26）

式（11.26）采用高斯求积公式进行计算。式（11.22）、式

(11.23)和式(11.25)中的积分可以利用式(11.26)进行计算。

将式(11.22)和式(11.23)代入式(11.17)可得:

$$\sum_{m=1}^{M}([H]_m\{u\}_m-[K]_m\{q\}_m)=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{\gamma}([H]_m[\psi]_m$$

$$-[K]_m[\eta]_m)\{\dot{a}\}_m+\{f\} \tag{11.27}$$

式中
$$[\psi]_m=[\{\psi\}_m^0\quad\{\psi\}_m^1\quad\cdots\quad\{\psi\}_m^Z] \tag{11.28}$$

$$[\eta]_m=[\{\eta\}_m^0\quad\{\eta\}_m^1\quad\cdots\quad\{\eta\}_m^Z] \tag{11.29}$$

$$\{\psi\}_m^e=[\psi_0^e\quad\psi_1^e\quad\cdots\quad\psi_Z^e]_m^T$$

$$\{\eta\}_m^e=[\eta_0^e\quad\eta_1^e\quad\cdots\quad\eta_Z^e]_m^T$$

其中$z=N_m$,其余记号与第三章相同。

因为
$$\{\dot{u}\}_m=[g]_m\{\dot{a}\} \tag{11.30}$$

因此
$$\{\dot{a}\}_m=[E]_m\{\dot{u}\}_m \tag{11.31}$$

$$[E]_m=[g]_m^{-1} \tag{11.32}$$

$$[g]_m=\begin{pmatrix} g^0(s_0) & g^1(s_0) & \cdots & g^Z(s_0)\\ g^0(s_1) & g^1(s_1) & \cdots & g^Z(s_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ g^0(s_Z) & g^1(s_Z) & \cdots & g^Z(s_Z)\end{pmatrix} \tag{11.33}$$

将式(11.31)代入式(11.27)可得:

$$\sum_{m=1}^{M}([H]_m\{u\}_m-[K]_m\{q\})=\sum_{m=1}^{M}[J]_m\{\dot{u}\}_m$$

$$+\{f\} \tag{11.34}$$

式中 $$[J]_m=\frac{1}{\gamma}([H]_m[\psi]_m-[K]_m[\eta]_m)[E]_m \tag{11.35}$$

由式（11.34）可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{q\}+[J]\{\dot{u}\}+\{f\} \tag{11.36}$$

式中 $$[F]=[[F]_1\quad [F]_2\quad \cdots\quad [F]_M] \tag{11.37}$$

$$\{U\}=[\{U\}_1^T\ \{U\}_2^T\ \cdots\ \{U\}_M^T]^T \tag{11.38}$$

$$F=H,\ K,\ J;\qquad U=u,\ q,\ \dot{u}$$

式（11.36）是一个常微分方程组，利用它可以求解热传导问题及扩散问题。式（11.36）与边界条件有关，计算时注意引入边界条件。

（三）选择坐标函数

由式（11.13）可知，当坐标函数$g^e(Q)$选定后，利用式（11.13）即可求出$\psi^e(Q)$。坐标函数的选定不是唯一的，有多种形式。本节介绍三种形式：

1．结点函数

如果坐标函数采用下列形式：

$$g^e(Q)=r(Q_e,\ Q) \tag{11.39}$$

则由式（11.13）可得：

$$\psi^e(Q)=\frac{1}{6}r^3(Q_e,\ Q) \tag{11.40}$$

式中$r(Q_e,\ Q)$为Q_e点到Q点的距离；Q是区域Ω内任一点的坐标；Q_e为第e个结点的坐标。

2．三角级数

如果坐标函数采用下列形式：

$$g^{e}(Q)=\sin A_{e}x\cos B_{e}y \tag{11.41}$$

则由式（11.13）可得：

$$\psi^{e}(Q)=-\frac{1}{A_{e}^{2}+B_{e}^{2}}\sin A_{e}x\cos B_{e}y \tag{11.42}$$

式中　$Q=(x,\ y)$

3．多项式

坐标函数也可以按巴斯加多项式三角形选定[见式(11.43)]。如果坐标函数按巴斯加多项式选定，则由式（11.13）得出的函数 $\psi^{e}(Q)$ 也是多项式，见式（11.44）。

$$\begin{array}{lccccccc}
g^{e}(Q): & & & & 1 & & & \\
 & & & x & & y & & \\
 & & x^{2} & & xy & & y^{2} & \\
 & x^{3} & & x^{2}y & & xy^{2} & & y^{3} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \tag{11.43}$$

$$\begin{array}{lcccc}
\psi^{e}(Q): & & \frac{1}{4}(x^{2}+y^{2}) & & \\
 & \frac{1}{6}x^{3} & & \frac{1}{6}y^{3} & \\
 & \frac{1}{12}x^{4} & \frac{1}{12}(x^{3}y+xy^{3}) & \frac{1}{12}y^{4} & \\
 \frac{1}{20}x^{5} & \frac{1}{12}x^{4}y & & \frac{1}{12}xy^{4} & \frac{1}{20}y^{5} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \tag{11.44}$$

§11.3　拉普拉斯变换法

对于非定常热传导问题，可以利用拉普拉斯变换法及样条边

界元法联合解题。

$u(Q,t)$的拉普拉斯变换定义为

$$U(Q,\alpha)=L[u(Q,t)]=\int_0^{\infty}u(Q,t)e^{-\alpha t}dt \quad (11.45)$$

式中α为复数。利用分部积分法可知：

$$L\left[\frac{\partial u(Q,t)}{\partial t}\right]=\alpha U(Q,\alpha)-u(Q,t_0) \quad (11.46)$$

对式（11.8）进行拉普拉斯变换可得：

$$\nabla^2U(Q,\alpha)-\frac{\alpha}{\gamma}U(Q,\alpha)+\frac{1}{\gamma}u(Q,t_0)=0 \quad (11.47)$$

对式（11.5）进行拉普拉斯变换可得：

$$\left.\begin{aligned}U(Q,\alpha)&=\overline{U}(Q,\alpha)=\frac{1}{\alpha}L[\bar{u}(Q,t)],\ Q\in\Gamma_u\\F(Q,\alpha)&=\overline{F}(Q,\alpha)=\frac{1}{\alpha}L[\bar{q}(Q,t)],\ Q\in\Gamma_u\end{aligned}\right\} \quad (11.48)$$

如果设U^*为基本解，则由式（11.47）可得加权残数法的积分式：

$$\int_{\Omega}\left(\nabla^2U-\frac{\alpha}{\gamma}U+\frac{1}{\gamma}u_0\right)U^*d\Omega=0 \quad (11.49)$$

式中 $U=U(Q,\alpha)$，$u_0=u(Q,t_0)$，$U^*=U^*(P,Q,\alpha)$

对式（11.49）第一项连续二次分部积分，可得：

$$\int_{\Omega}\left(\nabla^2U^*-\frac{\alpha}{\gamma}U^*\right)Ud\Omega+\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}u_0U^*d\Omega$$
$$=\int_{\Gamma}(UF^*-FU^*)d\Gamma \quad (11.50)$$

式中　$F=F(Q,\alpha)$　　$F^*=F^*(P,Q,\alpha)$

$$F=\partial U/\partial n \qquad F^*=\partial U^*/\partial n$$

因为基本解U^*满足下列方程：

$$\nabla^2 U^*-\frac{\alpha}{\gamma}U^*+\delta(P,\ Q)=0 \tag{11.51}$$

因此，式（11.50）可变为

$$C(P)U(P,\ \alpha)=\int_\Gamma[U^*(P,\ Q_0,\ \alpha)F(Q_0\alpha)$$

$$-F^*(P,\ Q_0,\ \alpha)U(Q_0,\ \alpha)]d\Gamma$$

$$+\frac{1}{\gamma}\int_\Omega U^*(P,\ Q,\ \alpha)u(Q,\ t_0)d\Omega \tag{11.52}$$

这就是经过拉普拉斯变换后的边界积分方程。式中$C(P)$为奇性系数，与第三章完全相同。

式（11.52）包含的区域积分，它可以化为边界积分。如果将边界及区域内部分别离散，则式（11.52）可变为下列形式：

$$[H]\{U\}=[K]\{F\}+\{U_0\} \tag{11.53}$$

式中$\{U_0\}$对应于式（11.52）中的第二个积分。

利用式（11.53）可求出$\{U\}$和$\{F\}$。当$\{U\}$和$\{F\}$确定后，利用式（11.52）的离散格式可求出区域内任一点的U和F值。

$u(P,\ t)$可用拉普拉斯变换的数值逆变换方法进行计算。设$u(P,\ t)$为

$$u(P,\ t)=u(P,\ \infty)+\sum_{n=1}^{N}a_n(P)\exp[-b_n(P)t] \tag{11.54}$$

式中$u(P,\infty)$为稳定解。为了确定系数a_n及b_n，对式（11.54）作拉普拉斯变换。由此可得：

$$U(P,\ \alpha)=\frac{u(P,\infty)}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(P)}{\alpha+b_n(P)} \qquad (11.55)$$

如果取N个α值，并令$b_n=\alpha_n$，则式（11.55）对每个点P都为N个特定系数$a_n(P)$，$n=1$，2，…，N。由此可知：

$$U(P,\alpha_k)=\frac{u(P,\infty)}{\alpha_k}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\alpha_k+\alpha_n}a_n(P) \qquad (11.56)$$

式中　$k=1$，2，…，N

由于$U(P,\ \alpha_k)$及$u(P,\ \infty)$已预先求得。因此，对每个点P，式（11.56）代表一个N阶的方程组。由此可得$a_n(P)$。将a_n代入式（11.54），并令$b_n=\alpha_n$，即可得到$u(P,\ t)$。$q(P,\ t)$的求法与求$u(P,\ t)$完全类似。

§11.4 基本解

利用边界元法求解扩散问题及热传导问题常用到两类基本解：（1））不含时间的基本解；（2）含时间的基本解。

（一）不含时间的基本解

在§11.3中用到的基本解是不含时间的，它由式（11.51）确定。对于三维问题：

$$U^*=\frac{(\gamma\alpha)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\gamma r}}N_{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}r\right] \qquad (11.57)$$

对于二维问题：

$$U^*=\frac{1}{2\pi}N_0\left[\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}r\right] \qquad (11.58)$$

式中N_k为k阶第二类Bessel函数。如果设

$$z=\left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}r$$

则 $$N_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\cos z \tag{11.59}$$

当$z\to 0$时，则由式（11.59）可得：

$$N_{\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (z\to 0) \tag{11.60}$$

将式（11.60）代入式（11.57）可得：

$$U^*=\frac{1}{4\pi r} \quad (z\to 0) \tag{11.61}$$

这说明三维问题的基本解U^*的奇异性与Laplace方程基本解的奇异性相同。对于二维问题，当$z\to 0$时，因为

$$N_0(z)\to -\ln(z) \quad (z\to 0) \tag{11.62}$$

因此 $$U^*=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad (r\to 0) \tag{11.63}$$

式中第一项为Laplace方程的基本解，第二项为常数，对奇异性没有影响。

（二）含时间的基本解

设$u^*(P,\ Q,\ t_l,\ t)$为含时间的基本解，它满足下列方程

$$\nabla^2 u^*+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u^*}{\partial t}+\delta(P,\ Q)\delta(t_L,\ t)=0 \tag{11.64}$$

对于三维问题，

$$u^* = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\gamma}} \exp\left[-\frac{r^2}{4\gamma\tau}\right] H(\tau) \qquad (11.65)$$

$$q^* = \frac{d}{16(\gamma\pi\tau)^{\frac{3}{2}}\tau} \exp\left[-\frac{r^2}{4\gamma\tau}\right] H(\tau) \qquad (11.66)$$

式中 $\tau = t_L - t$，$r = \overline{PQ}$

$d = x_i(P)n_i + x_i(Q)n_i$

$n_i = n_i(Q)$

$H(\tau)$ ——Heaviside函数

对于二维问题：

$$u^* = \frac{1}{4\pi\tau} \exp\left[-\frac{r^2}{4\gamma\tau}\right] H(\tau) \qquad (11.67)$$

$$q^* = \frac{d}{8\pi\gamma\tau^2} \exp\left[-\frac{r^2}{4\gamma\tau}\right] H(\tau) \qquad (11.68)$$

式（11.63）和式（11.65）所示的基本解有下列性质：

（1）$\lim\limits_{t \to t_L} u^*(P,\ Q,\ t_L,\ t) = \gamma\delta(P,\ Q)$ （11.69）

（2）$\lim\limits_{t_L \to \infty} \int_0^{t_L} u^*(P, Q, t_L, t)\, dt = u^*(P, Q)$ （11.70）

式中$u^*(P,\ Q)$为Laplace问题的基本解。

（3）式（11.57）和式（11.58）所示的基本解，可分别由式（11.65）和式（11.67）经过Laplace变换得到。

（4）$H(\tau)$可以取$H(\tau) = 1$。

（三）含时间基本解的利用

对式（11.8）可得下列加权积分式：

$$\int_{t_0}^{t_L}\int_{\Omega}[\nabla^2 u-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}]u^* d\Omega dt=0 \tag{11.71}$$

式中　　$u=u(Q,\ t)$，　　$u^*=u^*(P,\ Q,\ t_L,\ t)$

利用分部积分法可得：

$$\int_{t_0}^{t_L}\int_{\Omega}[\nabla^2 u^*+\frac{1}{\gamma}u^*]u d\Omega dt=[\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}uu^* d\Omega]_{t_0}^{t_L}$$

$$+\int_{t_0}^{t_L}\int_{\Gamma}[uq^*-qu^*]d\Gamma dt \tag{11.72}$$

另外　$$\int_{t_0}^{t_L}\delta(t_L-t)u(Q,t)dt=u(Q,t_L)\quad t_0<t<t_L \tag{11.73}$$

将式（11.64）代入式（11.72），利用式（11.69）和式（11.73）可得：

$$C(P)u(P,t_L)+\int_{t_0}^{t_L}\int_{\Gamma}q^*(P,Q_0,t_L,t)u(Q_0,t)\,d\Gamma dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_L}\int_{\Gamma}u^*(P,Q_0,t_L,t)q(Q_0,t)d\Gamma dt$$

$$+\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}u^*(P,Q,t_L,t_0)u(Q,t_0)d\Omega \tag{11.74}$$

由式（11.70）可知，当$t_L\to\infty$时，基本解与t无关，式（11.74）可以退化为Laplace问题的边界积分方程。

（四）离散格式

1．第一种离散格式

如果将整个边界Γ分为M个区域，整个区域Ω分为E个网格，

时间分为L步，则式（11.74）可写成形式：

$$
\begin{aligned}
&C(P)u(P,\ t_L)\\
&+\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L}\int_{\Gamma_m}\int_{t_{l-1}}^{t_l}q^*(P,\ Q_0,\ t_L,t)u(Q_0,\ t)dtd\Gamma\\
&=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L}\int_{\Gamma_m}\int_{t_{l-1}}^{t_l}u^*(P,\ Q_0,\ t_L,\ t)q(Q_0,\ t)dtd\Gamma\\
&+\frac{1}{\gamma}\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega e}u^*(P,\ Q,\ t_L,\ t_0)u(Q,\ t_0)d\Omega
\end{aligned}
\tag{11.75}
$$

2．第二种离散格式

如果将时间分为L步，则可分步进行计算。先由初始条件$u(Q,\ t_0)$求出$u(Q,\ t_1)$；其次将$u(Q,\ t_1)$作为初始条件求$u(Q,\ t_2)$…以此类推，最后将$u(Q,\ t_{L-1})$作为初始条件可求出$u(Q,\ t_L)$。这时式（11.74）可写成下列形式：

$$
\begin{aligned}
&C(P)u(P,t)\\
&+\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m}\int_{t_{l-1}}^{t_l}q^*(P,\ Q_0,\ t_l,\ t)\ u(Q,\ t)dtd\Gamma\\
&=\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m}\int_{t_{l-1}}^{t_l}u^*(P,\ Q_0,\ t_l,\ t)q(Q_0,\ t)dtd\Gamma\\
&+\frac{1}{\gamma}\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega e}u^*(P,Q,\ t_l,t_0)u(Q,t_0)d\Omega\\
&\qquad l=1,2,\ \cdots,\ L
\end{aligned}
\tag{11.76}
$$

上述两种格式各有优缺点：第一种格式的区域积分只需计算一次，而且$u(P,\ t_L)$可一次求出，但方程较复杂；第二种格式在时域内采用分步积分，无须对时间求和，因而方程简单，但对每一步需要求解区域积分。

式中$u(s,t)$和$q(s,t)$为边界未知量，可以用三次B样条函数来逼近，例如

$$\left.\begin{aligned} u(s,t) &= \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\phi_i(s)\psi_j(t) \\ q(s,t) &= \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{N} b_{ij}\phi_i(s)\psi_j(t) \end{aligned}\right\} \quad (11.77)$$

式中$\phi_i(s)$和$\Psi_j(t)$为三次B样条函数构成的基函数。由上述各式可以建立样条边界元法的计算格式。

参 考 文 献

[1]秦荣，热传导问题的样条边界元法，广西大学，1987年。

[2]秦荣，扩轨问题的样条边界元法，《样条边界元法》第十一章，广西大学，1987年。

[3]C.A.Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobed, Boundary Element Techniques, 1984。

[4]田中正隆，田中喜久昭，境界要素法——基础及应用（日文），丸善株式会社，1982年。

[5]秦荣，求解结构动力响应的样条函数方法，《工程力学》，2(1985)。

[6]秦荣，结构力学的样条函数方法，广西人民出版社，1985年。

[7]，波动问题的样条边界元法，广西大学，1987年。

第十二章　样条边界元法的几个问题

前几章介绍了样条边界元法的原理及其应用。本章介绍这个方法应用中的几个问题，供大家参考。

§12.1　断裂力学问题

本节介绍样条边界元法在线性断裂力学中的应用。计算结果表明，利用样条边界元法求解断裂力学问题是一个经济有效的方法。本节以平面问题为例。

（一）断裂力学问题

图12·1表示平面裂纹尖端区的坐标。裂纹尖端附近的应力及位移是所研究点到裂纹尖端距离 r 和方位 θ 的函数。当 r 相对裂纹尺寸是一个无穷小量（即 $r\to 0$）时，裂纹尖端附近的应力及位移场可表示为

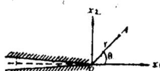


图12.1

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}&=f_1(K_{\text{I}},K_{\text{II}},r^{\frac{1}{2}},\theta)\\u_i&=f_2(K_{\text{I}},K_{\text{II}},r^{\frac{1}{2}},\theta)\end{aligned}\right\}\tag{12.1}$$

式中K_{I}及K_{II}分别为张开型（Ⅰ型）及面内剪切型（Ⅱ型）裂纹的应力强度因子。

应力强度因子可采用下列形式：

$$\left.\begin{aligned}K_{\text{I}}&=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}(\sigma_{22})_{\theta=0}\\K_{\text{II}}&=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}(\sigma_{12})_{\theta=0}\end{aligned}\right\}\tag{12.2}$$

应力强度因子也可采用下列形式：

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= \frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}(E'u_2)_{\theta=\pi} \\ K_{\mathrm{II}} &= \frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}(E'u_1)_{\theta=\pi} \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

式中

$$E' = \begin{cases} E & \text{平面应力问题} \\ E/(1-\mu^2) & \text{平面应变问题} \end{cases}$$

由上述可知，如果利用式（12.2）或式（12.3）求应力强度因子，则需先求出裂纹尖端附近的应力场或位移场。本节从裂纹尖端位移场出发计算应力强度因子。

（二）三次样条边界元法

如果不计体力，则边界积分方程为

$$C_{kl}(P)u_l(P) = \int_\Gamma [u^*_{kl}(P,s)p_l(s) - p^*_{kl}(P,s)u_l(s)]d\Gamma \tag{12.4}$$

所有记号与第四章相同，k，$l=1$，2。

利用边界积分方程的特点，可以把裂纹面作为边界面，从而可以直接求得裂纹面上的应力场或位移场。

图12.2是一个单边裂纹平面问题的计算模型，将整个边界Γ和裂纹面分为M个部分，则式（12.4）可变为下列形式：

$$C_{kl}(P_0)u_l(P_0) = \sum_{m=1}^{M}\Pi_{lm}(P_0,\ s) \tag{12.5}$$

式中
$$\Pi_{km}(P_0,s) = \int_{\Gamma_m}[u^*_{kl}(P_0,s)p_l(s) - p^*_{kl}(P_0,s)u_l(s)]d\Gamma \tag{12.6}$$

如果将边界Γ_m分为N_m等分（图12.2），则式（12.6）可变为

$$\Pi_{km}=\sum_{i=0}^{z}\left[\left(\int_{\Gamma_m}u_{kl}^{*}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)p_{li}-\left(\int_{\Gamma_m}p_{kl}^{*}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)u_{li}\right] \qquad (12.7)$$

式中$z=N_m$，$\phi_i(s)$采用第一章式（1.27）的形式；$u_{li}=u_l(s_i)$，$p_{li}=p_l(s_i)$。

对式（12.6）的离散有五种方法，本节只介绍其中的第三种方法（见第四章和第六章）。将式（12.7）代入式（12.5）可得：

$$\sum_{m=1}^{M}[([H]_{1m}\{u\}_{1m}+[H]_{2m}\{u\}_{2m})-([K]_{1m}\{p\}_{1m}+[K]_{2m}\{p\}_{2m})]=\{0\} \qquad (12.8)$$

所有记号与第四章相同，见式(4.135)～式(4.138)．由式(12.8)可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{p\} \qquad (12.9)$$

式（12.9）与边界条件有关．当引入边界条件后，则式（12.9）可变为

$$[A]\{X\}=\{f\} \qquad (12.10)$$

利用式（12.10）可求出边界未知量。当边界未知量确定后，即可确定裂纹尖端附近的应力场或应力场。



图12.2

（三）应力强度因子

本节用裂纹尖端位移场推算应力强度因子，可以避免由于裂纹尖端应力奇异性引起的困难。图12.3是一个受拉的平面问题，双边有裂纹。由于对称，可以取1/4部分进行计算（图12.4）。

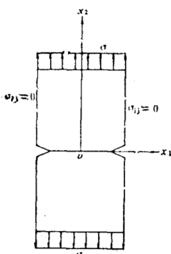


图12.3

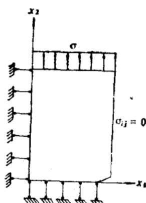


图12.4

计算精确度与边界单元的划分有关。因此，边界单元划分是否恰当，直接影响计算精确度。在裂纹尖端附近的单元必须划分密一些；远离裂纹尖端的单元可以划分稀疏一些，而且应该由密逐渐变稀。

§12.2 接触问题

接触现象普遍发生在工程建设中，因此，接触问题是一个值得研究的重要课题。接触问题可归结为求解两个或几个与接触条件耦合的Navier方程问题。一般情况，接触面是外力的函数，这种相关性使得接触问题成为高度的非线性问题。由于非线性，因而使求解的难度增大。

对于接触问题，利用解析法求解是非常困难的。因此，只得采用数值方法求解接触问题。目前主要采用下列数值方法：有限元法、边界元法、差分法和加权残数法。本节介绍一个样条边界元法，以平面问题为例。

（一）接触条件

图12.5为两个互相接触的弹性体。设Γ^A为物体A的边界，Γ^B为物体B的边界，Γ_C为两个物体接触的边界，则

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^A&=\Gamma_u^A=\Gamma_p^A+\Gamma_c^A\\ \Gamma^B&=\Gamma_u^B+\Gamma_p^B+\Gamma_c^B\end{aligned}\right\}\qquad(12.11)$$

式中Γ_c^A和Γ_c^B为未变形状态的接触边界。根据小变形理论，它们的长度近似地与接触边界Γ_c的长度相等，即$\Gamma_c^A=\Gamma_c^B=\Gamma_c$。

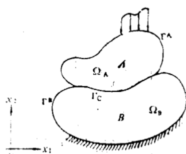


图12.5

对于每个弹性体，在边界点上定义一个新的局部坐标系（ξ_1，ξ_2），ξ_1轴垂直于边界而ξ_2轴与边界相切（图12.6）。设局部坐标系中，位移分量及面力分量分别为$\widetilde{u}_e$和$\widetilde{p}_e$；在公共坐标系（x_1，x_2）中的位移分量和面力分量分别为u_l和p_l。利用坐标变换可得：

$$u_l=\widetilde{u}_e\beta_{le}\qquad p_l=\widetilde{p}_e\beta_{le}\qquad e,l=1,2\qquad(12.12)$$

式中 $\beta_{le}=\cos(x_l,\xi_e)\qquad e,l=1,2\qquad(12.13)$

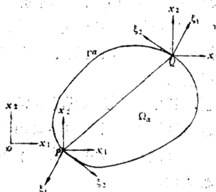


图12.6

设$\tilde{u}_1^0$为两个接触边界间的法向间距，从Γ_c^A到Γ_c的距离为$\gamma\tilde{u}_1^0$，从Γ_c^B到Γ_c的距离为$(1-\gamma)\tilde{u}_1^0$（图12.7）。如果局部坐标系在Γ_c上，则新的位移为

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{v}_1^A=\tilde{u}_1^A-\gamma\tilde{u}_1^0, \quad \tilde{v}_2^A=\tilde{u}_2^A, \ on\ \Gamma_c^A\\&\tilde{v}_1^B=\tilde{u}_1^B-(1-\gamma)\tilde{u}_1^0, \quad \tilde{v}_2^B=\tilde{u}_2^B, \ on\ \Gamma_c^B\end{aligned}\right\} \tag{12.14}$$

如果不考虑摩擦力，则接触条件为

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{v}_1^A+\tilde{v}_1^B=0\\&\tilde{p}_1^A-\tilde{p}_1^B=0, \quad \tilde{p}_1^A<0, \quad \tilde{p}_1^B<0\\&\tilde{p}_2^A=\tilde{p}_2^B=0\end{aligned}\right\} \tag{12.15}$$

由上述可得：

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{p}_1^A=\tilde{p}_1^B\leqslant 0\\&\tilde{v}_1^A=\tilde{v}_1^0-\tilde{u}_1^B\\&\tilde{p}_2^A=\tilde{p}_2^B=0\end{aligned}\right\} \tag{12.16}$$

因为$\tilde{v}_1^A$和$\tilde{v}_1^B$的存在表示接触位置Γ_c不吻合，因此它们应该等于零。实际上，接触区域的位置预先是未知的，参数γ是不知道的，求解时一般先给出γ的试探值（例如，$\gamma=0.5$），然后找出吻合的接触位置。

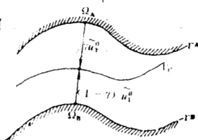


图12.7

（二）边界积分方程

如果不考虑体力，则边界积分方程为

$$C_{kl}^{\alpha}(P)u_l^{\alpha}(P)=\int_{\Gamma^{\alpha}-\Gamma_C^{\alpha}}[u_{kl}^{*\alpha}(P,Q_0)p_l^{\alpha}(Q_0)$$
$$-p_{kl}^{*\alpha}(P,Q_0)u_l^{\alpha}(Q_0)]d\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_C^{\alpha}}[u_{kl}^{*\alpha}(P,Q_0)p_l^{\alpha}(Q_0)$$
$$-p_{kl}^{*\alpha}(P,Q_0)u_l^{\alpha}(Q_0)]d\Gamma \qquad (12.17)$$

式中　$\alpha=A,\ B$

$$\left.\begin{aligned} u_l^{\alpha}&=\tilde{u}_e^{\alpha}\beta_{le} \qquad p_l^{\alpha}=\tilde{p}_l^{\alpha}\beta_{le} \\ u_{kl}^{*\alpha}&=u_{er}^{*\alpha}\beta_{ke}\beta_{lr}, \quad p_{kl}^{*\alpha}=p_{er}^{*\alpha}\beta_{ke}\beta_{lr} \end{aligned}\right\} \qquad (12.18)$$

其中　$\beta_{ke}=\cos(x_k,\ \xi_e)$；$e,h,l,r=1,2$

其余记号与第四章相同。为了联立求解式（12.17）所示的积分方程，可以利用式（12.16）所示的接触条件消去物体 B 的接触变量。

（三）样条边界元法

如果将每个弹性体的整个边界 Γ^{α} 分为 M 个部分，则式（12.17）可变为

$$C_{kl}^{\alpha}(P_0)u_l^{\alpha}(P_0)=\sum_{m=1}^{M}\Pi_{lm}^{\alpha}(P_0,\ s) \qquad (12.19)$$

式中　$$\Pi_{km}^{\alpha}=\int_{\Gamma_m^{\alpha}}[u_{kl}^{*\alpha}(P_0,s)p_l^{\alpha}(s)-p_{kl}^{*\alpha}(P_0,s)u_l^{\alpha}(s)]d\Gamma \qquad (12.20)$$

如果将边界 Γ_m^{α}分为N_m等分，则

$$
\left.\begin{aligned}
u_l^{\alpha}(s) &= \sum_{i=0}^{Z} u_{li}^{\alpha}\phi(s) \\
p_l^{\alpha}(s) &= \sum_{i=0}^{Z} p_{li}^{\alpha}\phi(s)
\end{aligned}\right\} \tag{12.21}
$$

将式（12.21）代入式（12.20）可得：

$$
\begin{aligned}
\Pi_{km}^{\alpha}(P_0,s) = \sum_{i=0}^{Z}\Bigg[&\left(\int_{\Gamma_m^{\alpha}} u_{kl}^{*\alpha}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)p_{li}^{\alpha} \\
&-\left(\int_{\Gamma_m^{\alpha}} p_{kl}^{*\alpha}(P_0,s)\phi_i(s)d\Gamma\right)u_{li}^{\alpha}\Bigg]
\end{aligned} \tag{12.22}
$$

将式（12.22）代入式（12.19）可得：

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M}[([H]_{1m}^{\alpha}\{u\}_{1m}^{\alpha}+[H]_{2m}^{\alpha}\{u\}_{2m}^{\alpha})-([K]_{1m}^{\alpha}\{p\}_{1m}^{\alpha} \\
+[K]_{2m}^{\alpha}\{p\}_{2m}^{\alpha})]=\{0\}
\end{aligned} \tag{12.23}
$$

所有记号与第四章相同。如果接触边界 Γ_c^{α} 是连续的，则可设 $\Gamma_m^{\alpha}=\Gamma_C^{\alpha}$。由式（12.23）可得：

$$
[H]^{\alpha}\{u\}^{\alpha}=[K]^{\alpha}\{p\}^{\alpha} \tag{12.24}
$$

式（12.24）与边界条件有关，引入边界条件后，可变为

$$
[A]^{\alpha}\{X\}^{\alpha}=\{f\}^{\alpha} \qquad \alpha=A,\ B \tag{12.25}
$$

（四）计算方法

如果不考虑摩擦力，则接触问题可采用两种不同的计算方法：（1）迭代法；（2）增量法。本节只采用迭代法。将式（12.18）代入式（12.24）可得：

$$
[\widetilde{H}]^{\alpha}\{\widetilde{u}\}^{\alpha}=[\widetilde{K}]^{\alpha}\{\widetilde{p}\}^{\alpha} \tag{12.26}
$$

在式（12.26）中引入边界条件可得：

$$
[\widetilde{A}]^{\alpha}\{\widetilde{X}\}^{\alpha}=\{\widetilde{f}\}^{\alpha} \qquad \alpha=A,B \tag{12.27}
$$

由此可得：

$$\begin{bmatrix} [\widetilde{A}]^A & [0] \\ [0] & [\widetilde{A}]^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\widetilde{X}\}^A \\ \{\widetilde{X}\}^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\widetilde{f}\}^A \\ \{\widetilde{f}\}^B \end{Bmatrix} \quad (12.28)$$

式（12.28）为迭代计算的基本方程。迭代法的计算过程如下：首先假设可能的接触区域，求出边界位移分量及面力分量；如果算出的法向接触力都是压力而且在对应两自由边界上点之间的法向位移满足下列不嵌入条件：

$$\widetilde{u}_1^A + \widetilde{u}_1^B \leqslant u_1^0 \quad (12.29)$$

则所得的解答是正确的。如果算出的结果不满足上述两个条件，则必须修正接触状态重复计算。如此反复迭代运算，直到在Γ_C^a上只存在压力而在Γ_C^a外满足式（12.29）所示的条件为止，这时所得的结果为正确的解答。

样条边界元法不仅可以求解无摩擦接触问题，而且也可以求解有摩擦接触问题。实践证明，样条边界元法求解接触问题比有限元法优越。

利用样条边界元法求解有摩擦接触问题时，必须考虑接触面的摩擦。当考虑接触面的摩擦时，接触面的滑动引起能量的耗散，滑动区域中的相对切向位移含有能量耗散。在这种情况下，位移和摩擦区域的最终状态用加载历程来确定。因此，必须用增量（追踪加载历程）的方法来求解有摩擦的接触问题[8]。

§12.3 电磁场问题

电磁场问题的数值分析是近年来国内外研究的重要课题。目前电磁场问题的数值方法有差分法、有限元法、边界元法和加权残数法。本节介绍一个样条边界元法，同时以均质各向同性体为

例。

（一）基本方程

电磁场问题的理论基础是麦克斯韦1865年提出的电磁理论。在实用上，电磁场问题可归结为求解下列基本方程：

$$\nabla^2 u - \mu\varepsilon\ddot{u} = -\rho/\varepsilon \tag{12.30}$$

$$\nabla^2 A - \mu\varepsilon\ddot{A} = -\mu J \tag{12.31}$$

式中 u 为电位，ε 为介电常数，ρ 为自由电荷密度；A 为向量磁位，J 为电流密度，μ 为磁导率。

$$\ddot{u} = \partial^2 u/\partial t^2 \qquad \ddot{A} = \partial^2 A/\partial t^2 \tag{12.32}$$

在式（12.30）和式（12.31）中，u 及 A 为基本未知量。一般情况下，解出的电磁场的场量既是空间的又是时间的函数。因此，在时变场范畴中，为了定解，还必须给定相应的初始条件和边界条件。对于静电磁场问题，式（12.30）和式（12.31）可变为

$$\nabla^2 u = -\rho/\varepsilon \tag{12.33}$$

$$\nabla^2 A = -\mu J \tag{12.34}$$

这是泊松方程。

电场的边界条件可以写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} u &= u \qquad on \quad \Gamma_u \\ q &= \bar{q} \qquad on \quad \Gamma_q \end{aligned}\right\} \tag{12.35}$$

式中 $q = -\varepsilon\partial u/\partial n$ （12.36）

如果电磁场的场域由不同媒质构成，则在不同媒质的分界面上，媒质的特性系数 ε 及 μ 发生突变，因此，相应的场量也将发生突变。这时，电场分界面上的边界条件可写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} u_i &= u_j \\ \varepsilon_i q_i &= \varepsilon_j q_j \end{aligned}\right\} \tag{12.37}$$

利用式（12.30）和式（12.31）分别可求出电磁场问题的电位及磁位。电位与向量磁位有下列关系：

$$\mathrm{div}A = -\mu\varepsilon\partial u/\partial t \tag{12.38}$$

当电位及磁位确定后，即可求出电场强度及磁感应强度：

$$E = -\mathrm{grad}u - \partial A/\partial t \tag{12.39}$$

$$B = \mathrm{rot}A \tag{12.40}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}A &= \nabla\cdot A \\ \mathrm{grad}u &= \nabla u \\ \mathrm{rot}A &= \nabla\times A \end{aligned}\right\} \tag{12.41}$$

E为电场强度、B为磁感应强度。当E和B确定后，即可求出磁场强度及电位移：

$$H = B/\mu \qquad D = \varepsilon E \tag{12.42}$$

式中H为磁场强度，D为电位移。

（二）静电场的样条边界元法

图12.8是一个静电场，不考虑磁场的影响，则$A\equiv 0$。设Ω为导体的区域，Ω'为Ω的外域。由于电磁场问题的分析一般要求确定导体外部的场量分布，因此，本节只分析外域Ω'的静力场。

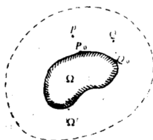


图12.8

对于静电场，则式（12.33）便变为

$$\varepsilon\nabla^2 u + \rho = 0 \qquad \in\Omega' \tag{12.43}$$

边界条件为式（12.35）。如果式（12.43）两边乘上基本解$u^*(P,Q)$，则有

$$\int_{\Omega'}(\varepsilon\nabla^2 u + \rho)u^* d\Omega' = 0 \tag{12.44}$$

式中基本解u^*满足下列方程：

$$\varepsilon\nabla^2 u^* + \delta = 0 \tag{12.45}$$

利用分部积分法，则式（12.44）可变为

$$C(P)u(P) = -\int_{\Gamma}[u^*(P,Q_0)q(Q_0) - q^*(P,Q)u(Q_0)]d\Gamma + \int_{\Omega'}\rho(Q)u^*(P,Q)d\Omega'(Q) \tag{12.46}$$

式中的区域积分可以化为边界积分。在边界Γ_∞上，$u=0$，$q=0$。基本原理和方法与第三章相同。$q^*(P,Q) = -\varepsilon\partial u^*(P,Q)/\partial n(Q)$。

如果将整个边界Γ分为M个部分，则式（12.46）可变为

$$C(P)\,u(P) = \sum_{m=1}^{M}\Pi_m(P,s) + f(P) \tag{12.47}$$

式中 $$\Pi_m(P,s) = -\int_{\Gamma_m}[u^*(P,s)q(s) - q^*(P,s)u(s)]d\Gamma \tag{12.48}$$

$$f(P) = \int_{\Omega'}\rho(Q)u^*(P,Q)d\Omega' \tag{12.49}$$

对式（12.48）的离散有五种方法，见第三章。如果将边界Γ_m分为N_m等分，则式（12.47）可变为

$$\sum_{m=1}^{M}[H]_m\{u\}_m = \sum_{m=1}^{M}[K]_m\{q\}_m + \{f\} \tag{12.50}$$

式中 $$\{f\} = [f(s_0)\ \ f(s_1)\ \ f(s_2)\ \cdots\ f(s_N)]^T \tag{12.51}$$

由式（12.50）可得：

$$[H]\{u\} = [K]\{q\} + \{f\} \tag{12.52}$$

利用式（12.52）可求出边界未知量，但注意引入边界条件。当边界未知量确定后，利用式（12.46）即可求出外域Ω'任一点P的电位$u(P)$值。当$u(P)$确定后，利用式（12.39）即可确定电场的强度：

$$E = -\mathrm{grad}\,u \tag{12.53}$$

式中 $$\mathrm{grad}\,u = \nabla u \tag{12.54}$$

（三）恒定磁场的样条边界元法

对于恒定磁场，式（12.34）可变为

$$\nabla^2 A + \mu J = 0 \tag{12.55}$$

另外 $\mathrm{rot}H = J \qquad \mathrm{div}B = 0$ （12.56）

如果电流密度J等于零，则式（12.56）便变为

$$\mathrm{rot}H = 0 \qquad \mathrm{div}B = 0 \tag{12.57}$$

$$\nabla^2 A = 0 \tag{12.58}$$

如果以φ表示磁位，则利用对偶原理可得：

$$H = -\mathrm{grad}\varphi \tag{12.59}$$

由上述各式可得：

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{12.60}$$

由上述可知，恒定磁场问题与电荷密度ρ为零的静电场问题完全相似。实际上是一个拉普拉斯方程的求解问题，利用样条边界元法求解恒定磁场问题与求解位势问题完全相同，见第三章。

（四）稳态时变场中的样条边界元法

一般的电磁场与时间有关，在稳态时变电磁场中，可假设

$$\left.\begin{aligned} u(Q,t) &= u(Q)e^{i\omega t} \\ A(Q,t) &= A(Q)e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{12.61}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho(Q,t) &= \rho(Q)e^{i\omega t} \\ J(Q,t) &= J(Q)e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{12.62}$$

将式（12.61）和式（12.62）代入式(12.30)和式（12.31）可得：

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u(Q) + k^2 u(Q) &= \rho(Q)/\varepsilon \\ \nabla^2 A(Q) + k^2 A(Q) &= \mu J(Q) \end{aligned}\right\} \tag{12.63}$$

式中 $$k^2=\omega^2\mu\varepsilon \tag{12.64}$$

如果设

$$D(Q,t)=D(Q)e^{i\omega t}, \quad B(Q,t)=B(Q)e^{i\omega t} \tag{12.65}$$

式中 t 为时间、则

$$\left.\begin{aligned}&D(Q)=-\varepsilon\,\mathrm{grad}\,u(Q)-\varepsilon i\omega A(Q)\\&B(Q)=\mathrm{rot}\,A(Q)\end{aligned}\right\} \tag{12.66}$$

如果求外域Ω'（图12.8）的电位 u，则

$$\nabla^2 u(Q)+k^2 u(Q)=\rho(Q)/\varepsilon \quad \in\Omega' \tag{12.67}$$

边界条件为式（12.35）。

如果式（12.67）两边乘上基本解$u^*(P,Q)$，则有

$$\int_{\Omega'}(\nabla^2 u+k^2 u-\rho/\varepsilon)u^* d\Omega'=0 \tag{12.68}$$

式中u^*为基本解，它满足下列方程：

$$\nabla^2 u^*+k^2 u^*+\delta(P,Q)=0 \tag{12.69}$$

由式（12.69）可得：

$$\left.\begin{aligned}&u^*(P,Q)=u^*(r)=\frac{1}{4i}H_0^{(2)}(kr)\\&q^*(P,Q)=\frac{\varepsilon}{4i}H_1^{(2)}(kr)r_a n_a\end{aligned}\right\} \tag{12.70}$$

式中$r=\overline{PQ}$，$r_a=x_a(P)-x_a(Q)$；$H_0^{(2)}$及$H_1^{(2)}$分别为0阶及一阶第二类Hankel 函数。式（12.70）为二维问题的基本解，对于三维问题，则有

$$\left.\begin{aligned}&u^*(P,Q)=\frac{1}{4\pi r}\exp(-ikr)\\&q^*(P,Q)=\frac{\varepsilon}{4\pi r}\left(\frac{1}{r}+ik\right)\exp(-ikr)r_a n_a\end{aligned}\right\} \tag{12.71}$$

利用分部积分法，则式（12.68）可变为

$$C(P)u(P) = -\int_{\Gamma}[u^*(P,Q_0)q(Q_0) - q^*(P,Q_0)u(Q_0)]d\Gamma$$

$$-\int_{\Omega'}[\rho(Q)/\varepsilon]u^*(P,Q)d\Omega' \qquad (12.72)$$

这是电磁场问题的边界积分方程。

利用样条边界元法，式(12.72)可变为下列形式：

$$\sum_{m=1}^{M}[H]_m\{u\}_m = \sum_{m=1}^{M}[K]_m\{q\}_m + \{f\} \qquad (12.73)$$

式中

$$\{f\} = [f(s_0) \quad f(s_1) \quad f(s_2)\cdots f(s_N)]^T \qquad (12.74)$$

$$f(s_j) = -\int_{\Omega'}[\rho(Q)/\varepsilon]u^*(s_j,Q)d\Omega' \qquad (12.75)$$

式(12.75)可化为边界积分。由式(12.73)可得：

$$[H]\{u\} = [K]\{q\} + \{f\} \qquad (12.76)$$

这是样条边界元法的计算格式，由此可求出边界未知量。

当边界未知量确定后，利用式(12.72)可求出外域Ω'任一点的$u(P)$值。利用上述方法同样可求出外域Ω'任一点的$A(P)$值。当u及A确定后，利用相应的公式可求出电磁场的各个物理量。

§12.4 轴对称弹性体问题

轴对称体在工程建设中应用很广泛，例如竖井中的圆柱厚壳，压力容器中的厚壳和机器中的圆轴。本节介绍轴对称弹性体问题的样条边界元法。轴对称体是一个三维问题，一般来说，样条边界元法可以将三维问题降为二维问题，但对于轴对称体，样条边界元法可以将三维问题降为一维问题。因此，利用样条边界元法计算轴对称体的位移和应力是一个行之有效的方法。

(一)边界积分方程

图12.9是一个轴对称体。由图12.10可知，直角坐标系(x_1,

x_2，x_3）与圆柱坐标系（r，θ，z）有下列关系：

$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ x_3 = z \tag{12.77}$$

因此在任一点（r,θ,z）有下列关系：

$$\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_z \end{Bmatrix} = A^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} \tag{12.78}$$

式中e_1、e_2及e_3为直角坐标系的单位向量，e_r、e_θ及e_z为圆柱坐标系的单位向量，A为变换矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.79}$$

$$A^{\mathrm{T}} = A^{-1} \tag{12.80}$$

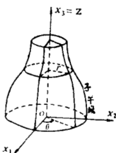


图12.9

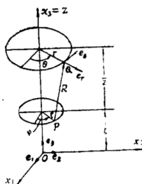


图12.10

对于轴对称问题，采用圆柱坐标系较为方便。在圆柱坐标系中，边界积分方程为

$$C(\widetilde{P})u(\widetilde{P}) = \int_s [U^*(\widetilde{P},\widetilde{Q}_0)p(\widetilde{Q}_0) - P^*(\widetilde{P},\widetilde{Q}_0)u(\widetilde{Q}_0)]ds + \int_V U^*(\widetilde{P},\widetilde{Q})b(\widetilde{Q})dV \tag{12.81}$$

式中　$\widetilde{P} = (\rho,\psi,\xi)$　　$\widetilde{Q} = (r,\theta,z)$

$$
\left.\begin{array}{l}
u=[u_r \quad u_\theta \quad u_z]^T \\
p=[p_r \quad p_\theta \quad p_z]^T \\
b=[b_r \quad b_\theta \quad b_z]^T
\end{array}\right\} \tag{12.82}
$$

$$
C(P)=\begin{cases} I & P\in V \\ \frac{1}{2}I & P\in s\text{（光滑点）} \\ 0 & P\in (V+s) \end{cases} \tag{12.83}
$$

$$
U^*=\begin{bmatrix} U^*_{rr} & U^*_{r\theta} & U^*_{rz} \\ U^*_{\theta r} & U^*_{\theta\theta} & U^*_{\theta z} \\ U^*_{zr} & U^*_{z\theta} & U^*_{zz} \end{bmatrix} \tag{12.84}
$$

$$
P^*=\begin{bmatrix} P^*_{rr} & P^*_{r\theta} & P^*_{rz} \\ P^*_{\theta r} & P^*_{\theta\theta} & P^*_{\theta z} \\ P^*_{zr} & P^*_{z\theta} & P^*_{zz} \end{bmatrix} \tag{12.85}
$$

式中u、p及b分别为圆柱坐标系中的位移向量、面力向量及体力向量；I为3阶单位矩阵；U^*及P^*为圆柱坐标系下的基本解，见本章附录。

如果物体是一个轴对称体，则

$$
ds=rd\theta d\Gamma \qquad dV=rd\theta d\Omega \tag{12.86}
$$

式中 $d\Omega=drdz$

如果物体不仅是一个轴对称体，而且受轴对称环形荷载（图12.11），则式（12.81）可变为

$$
\begin{aligned}
C(P)u(P)=&\int_\Gamma [u^*(P,Q_0)p(Q_0) \\
&-p^*(P,Q_0)u(O_0)]r(Q_0)d\Gamma \\
&+\int_\Omega u^*(P,Q)b(Q)r(Q)d\Omega
\end{aligned} \tag{12.87}
$$

式中　$P=(\rho,\xi) \qquad Q=(r,z)$　（12.88）

$$\left.\begin{aligned} u^{*}(P,Q) &= \int_{0}^{2\pi} U^{*}(\widetilde{P},\ \widetilde{Q})\,d\theta \\ p^{*}(P,Q) &= \int_{0}^{2\pi} P^{*}(\widetilde{P},\ \widetilde{Q})\,d\theta \end{aligned}\right\} \tag{12.89}$$

$$u^{*}(P,Q)=\begin{bmatrix} u_{rr}^{*} & u_{r\theta}^{*} & u_{rz}^{*} \\ u_{\theta r}^{*} & u_{\theta\theta}^{*} & u_{\theta z}^{*} \\ u_{zr}^{*} & u_{z\theta}^{*} & u_{zz}^{*} \end{bmatrix} \tag{12.90}$$

$$p^{*}(P,Q)=\begin{bmatrix} p_{rr}^{*} & p_{r\theta}^{*} & p_{rz}^{*} \\ p_{\theta r}^{*} & p_{\theta\theta}^{*} & p_{\theta z}^{*} \\ p_{zr}^{*} & p_{z\theta}^{*} & p_{zz}^{*} \end{bmatrix} \tag{12.91}$$

式（12.87）是轴对称问题的边界积分方程。式中Γ为$r^{+}-z$半平面与物体表面s的交线，Ω为$r^{+}-z$半平面与物体V的交面（图12.12），它们位于rz平面内。由此可知，对于轴对称问题，利用边界元法或样条边界元法可以将三维问题降为一维问题。

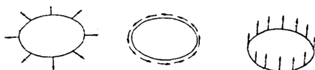


图12.11

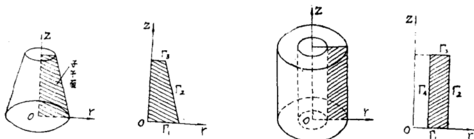


图12.12

（二）轴对称问题的基本解

如果物体不仅是一个轴对称体，而且受轴对称环形荷载（图12.11），则这个问题称为轴对称问题。对于轴对称问题，式（12.90）中的基本解u_{kj}^*可以由下列公式决定[4][8]：

$$u_{rr}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\mu)r\rho\sqrt{a}}\left\{\left[-4(1-\mu)a + \frac{(r^2-\rho^2)+\bar{z}^2(r^2+\rho^2)}{R^2}\right]B + \left[4(1-\mu)b-(r^2+\rho^2)\right]J\right\} \qquad (12.92a)$$

$$u_{zr}^* = \frac{\bar{z}}{8\pi G(1-\mu)\rho\sqrt{a}}\left(\frac{c}{R^2}B - J\right) \qquad (12.92b)$$

$$u_{\theta\theta}^* = \frac{1}{2\pi G r\rho\sqrt{a}}(bJ - aB) \qquad (12.92c)$$

$$u_{rz}^* = \frac{\bar{z}}{8\pi G(1-\mu)r\sqrt{a}}\left(\frac{d}{R^2}B + J\right) \qquad (12.92d)$$

$$u_{zz}^* = \frac{1}{4\pi G(1-\mu)\sqrt{a}}\left[\frac{\bar{z}^2}{R^2}B + (3-4\mu)J\right] \qquad (12.92e)$$

$$u_{\theta r}^* = u_{r\theta}^* = u_{z\theta}^* = u_{\theta r}^* = 0$$

式中 $R^2 = (r-\rho)^2 + \bar{z}^2 \qquad (12.93)$

$$\left.\begin{aligned} a &= (r+\rho)^2 + \bar{z}^2 \\ b &= r^2 + \rho^2 + \bar{z}^2 \\ c &= r^2 - \rho^2 + \bar{z}^2 \\ d &= r^2 - \rho^2 - \bar{z}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (12.94)$$

$$\bar{z} = z - \xi \qquad (12.95)$$

$$B=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-h^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}d\alpha$$

$$J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-h^2\sin^2\alpha)^{-\frac{1}{2}}d\alpha \tag{12.96}$$

$$h^2=4r\rho/a \tag{12.97}$$

其中R，r，ρ及$\bar{z}$见图12.10。式（12.96）为全椭圆积分，在一般数学手册中有数值表可查。

式（12.91）中的p^*_{kj}可由下列公式决定：

$$p^*_{kj}=\sigma^*_{klj}\,n_l \qquad j,k,l=r,\theta,z \tag{12.98}$$

式中$n_\theta=0$；σ^*_{klj}由下列公式确定[4][8]：

$$\begin{aligned}\sigma^*_{rrr}=&\frac{1}{16\pi(1-\mu)\rho r^2\sqrt{a}}\Big\{\Big[(7-8\mu)a\\&+\frac{4(1-\mu)[\rho^2(\rho^2-r^2)+\bar{z}^2(\rho^2+b)]}{R^2}\\&-\frac{3(r^2-\rho^2)^2-6\bar{z}^2(r^2-\rho^2)+9\bar{z}^4}{R^2}\\&+\frac{4[(\rho+r)^3(\rho-r)^3-\bar{z}^6+\bar{z}^2(r^2-\rho^2)c]b}{aR^4}\Big]B\\&+\Big[3(r^2-\rho^2)-9\bar{z}^2-4(1-2\mu)(r^2+2\rho^2+2\bar{z}^2)\\&-\frac{(\rho+r)^3(\rho-r)^3-\bar{z}^6+\bar{z}^2(r^2-\rho^2)c}{aR^2}\Big]J\Big\}\end{aligned} \tag{12.99a}$$

$$\begin{aligned}\sigma^*_{\theta\theta r}=&\frac{1}{16\pi(1-\mu)\rho r^2\sqrt{a}}\Big\{\Big[-(7-8\mu)a\\&+\frac{4(1-\mu)[\rho^2(r^2-\rho^2)-\bar{z}^2(b+\rho^2)]}{R^2}\\&+\frac{6r^2\rho^2-9r^4+3\rho^2-3\bar{z}^2(6r^2+2\rho^2+3\bar{z}^2)}{R^2}\end{aligned}$$

$$+\frac{4[(r-\rho)^3(r+\rho)^3+3r^2\bar{z}^2(r^2+\bar{z}^2)}{abR^4}$$

$$+\frac{\rho^2\bar{z}^2(\bar{z}^2-\rho^2-2r^2)-\bar{z}^6]b}{abR^4}\Big]B$$

$$+[4(1-2\mu)(r^2+2\rho^2+2\bar{z}^2)+3(3r^2+\rho^2+3\bar{z}^2)$$

$$-\frac{(r-\rho)^3(r+\rho)^3+3r^2\bar{z}^2(r^2+\bar{z}^2)}{aR^2}$$

$$+\frac{\rho^2\bar{z}^2(\bar{z}^2-\rho^2-2r^2)-\bar{z}^6}{aR^2}\Big]J\ \Big\} \qquad (12.99b)$$

$$\sigma^*_{zzr}=\frac{1}{4\pi(1-\mu)\rho\sqrt{a}}\Big\{\Big[\frac{(1-2\mu)c+3\bar{z}^2}{R^2}-\frac{4\bar{z}^2bc}{aR^4}\Big]B$$

$$+\Big[(1-2\mu)-\frac{\bar{z}^2c}{aR^2}\Big]J\Big\} \qquad (12.99c)$$

$$\sigma^*_{rzr}=\frac{\bar{z}}{8\pi(1-\mu)\rho r\sqrt{a}}$$

$$\Big\{\Big[-\frac{6\bar{z}^2+2(1-2\mu)b}{R^2}+\frac{4[\bar{z}^4-(r^2-\rho^2)^2b}{aR^4}\Big]B$$

$$+\Big[3+2(1-2\mu)-\frac{\bar{z}^4-(r^2-\rho^2)^2}{aR^2}\Big]J\Big\}$$

$$(12.99d)$$

$$\sigma^*_{r\theta\theta}=\frac{1}{4\pi\rho r^2\sqrt{a}}\Big\{-2(2\rho^2+r^2+2\bar{z}^2)J+\Big(3a-\frac{bd}{R^2}\Big)B\Big\}$$

$$(12.99e)$$

$$\sigma^*_{z\theta\theta}=\frac{1}{2\pi r\rho\sqrt{a}}\Big(J-\frac{b}{R^2}B\Big) \qquad (12.99f)$$

$$\sigma^*_{rrz}=\frac{\bar{z}}{8\pi(1-2\mu)r^2\sqrt{a}}\Big\{\Big[\frac{4(1-2\mu)r^2-6d}{R^2}+\frac{4bd}{aR^2}\Big]B$$

$$-\Big(3+\frac{d}{aR^2}\Big)J\Big\} \qquad (12.99g)$$

$$\sigma^*_{\theta\theta z} = \frac{\bar{z}}{8\pi(1-\mu)r^2\sqrt{a}}\Bigg\{\Bigg[\frac{4(1-2\mu)r^2-6b}{R^2} + \frac{4a[(r^2-\rho^2)^2+\bar{z}^2(2b-\bar{z}^2)}{aR^4}\Bigg]B + \Bigg[3 - \frac{(r^2-\rho^2)^2+\bar{z}^2(2b-\bar{z}^2)}{aR^2}\Bigg]J\Bigg\} \quad (12.99h)$$

$$\sigma^*_{zzz} = \frac{\bar{z}}{2\pi(1-\mu)\sqrt{a}}\Bigg\{\Bigg(-\frac{1-2\mu}{R^2} - \frac{4\bar{z}^2 b}{aR^4}\Bigg)B + \frac{\bar{z}^2}{aR^2}J\Bigg\} \quad (12.99i)$$

$$\sigma^*_{rzz} = \frac{-1}{4\pi(1-\mu)r\sqrt{a}}\Bigg\{\Bigg(\frac{3\bar{z}^2+(1-2\mu)d}{R^2} + \frac{4\bar{z}^2 bd}{aR^4}\Bigg)B + \Bigg[\Bigg(1-2\mu) - \frac{\bar{z}^2 d}{aR^2}\Bigg]J\Bigg\} \quad (12.99j)$$

$$\sigma^*_{rr\theta} = \sigma^*_{\theta\theta\theta} = \sigma^*_{zz\theta} = \sigma^*_{r\theta r} = \sigma^*_{z\theta r} = \sigma^*_{rz\theta} = \sigma^*_{r\theta z} = \sigma^*_{\theta zz} = 0$$

如果$r=0$，则式（12.92）及式（12.99）可变为

$$u^*_{rr} = u^*_{\theta r} = u^*_{r\theta} = u^*_{\theta\theta} = u^*_{z\theta} = u^*_{rz} = u^*_{\theta z} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} u^*_{zr} &= \frac{-\rho\bar{z}}{8G(1-\mu)(\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2})^3} \\ u^*_{zz} &= \frac{1}{8G(1-\mu)\rho\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}}\left(\frac{\bar{z}^2}{\rho^2+\bar{z}^2}+3-4\mu\right) \end{aligned}\right\} \quad (12.100)$$

$$\sigma^*_{rrr} = \frac{3}{8(1-\mu)\rho\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}}\left[1 - \frac{\bar{z}^2}{\rho^2+\bar{z}^2} - \frac{\bar{z}^2\rho^2}{(\rho^2+\bar{z}^2)^2}\right]$$

$$\sigma^*_{zzr} = \frac{1}{8(1-\mu)\rho\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}}\left[-1+2\mu+\frac{(1-2\mu)(\bar{z}^2-\rho^2)+6\bar{z}^2}{\rho^2+\bar{z}^2} - \frac{6\bar{z}^4}{(\rho^2+\bar{z}^2)^2}\right]$$

$$\sigma^*_{rrz} = \frac{\bar{z}}{4(1-\mu)\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}}\left[\frac{1-2\mu}{\rho^2+\bar{z}^2} - \frac{3\rho^2}{2(\rho^2+\bar{z}^2)^2}\right]$$

$$\sigma^*_{zzz} = \frac{-\bar{z}}{4(1-\mu)\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}}\left[\frac{1-2\mu}{\rho^2+\bar{z}^2} + \frac{3\bar{z}^2}{(\rho^2+\bar{z}^2)^2}\right]$$

$$\sigma^*_{\theta\theta r} = \sigma^*_{rrr}, \qquad (12.101)$$

σ^*_{kij} 的其余值为零（例如，$\sigma^*_{rr\theta} = \sigma^*_{rzr} = 0$）。

（三）样条边界元法

图12.13是一个空心的轴对称体，由于轴对称，它可以按图12.14进行边界元分析。如果将边界Γ分为M个部分，则式（12.87）可变为下列形式：

$$C(P_0)u(P_0) = \sum_{m=1}^{M}\Pi_m(P_0,s) + f(P_0) \qquad (12.102)$$

式中 $$\Pi_m(P_0,s) = \int_{\Gamma_m}[u^*(P_0,s)p(s) - p^*(P_0,s)u(s)]r(s)d\Gamma \qquad (12.103)$$

$$f(P_0) = \int_{\Omega} u^*(P_0,Q)b(Q)r(Q)d\Omega \qquad (12.104)$$

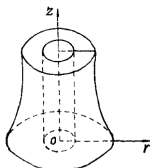


图12.13



图12.14

如果边界Γ_m分为N_m等分（图12.14），则

$$\left.\begin{aligned} u_k(s) &= \sum_{i=0}^{Z} u_{ki}\phi_i(s) \\ p_k(s) &= \sum_{i=0}^{Z} p_{ki}\phi_i(s) \end{aligned}\right\} k = r,\theta,z \tag{12.105}$$

式中$z = N_m$；$\phi_i(s)$是三次B样条函数构成的基函数(见第一章)。

因为$u = [u_r \;\; u_\theta \;\; u_z]^T$及$p = [p_r \;\; p_\theta \;\; p_z]^T$，则式（12.105）可变为

$$\left.\begin{aligned} u(s) &= \sum_{i=0}^{z} u_i\phi_i(s) \\ p(s) &= \sum_{i=0}^{z} p_i\phi_i(s) \end{aligned}\right\} \tag{12.106}$$

式中 $u_i = [u_{ri} \quad u_{\theta i} \quad u_{zi}]^T$

$p_i = [p_{ri} \quad p_{\theta i} \quad p_{zi}]^T$

将式（12.106）代入式（12.103）中可得：

$$\Pi_m(P_0,s) = \sum_{i=0}^{z}\left[\left(\int_{\Gamma_m} u^*(P_0,s)\phi_i(s)r(s)d\Gamma\right)p_{im} - \left(\int_{\Gamma_m} p^*(P_0,s)\phi_i(s)r(s)d\Gamma\right)u_{im}\right] \tag{12.107}$$

如果设$P_0 = s_j$（$j = 0,1,2,\cdots,N$），则式（12.102）可变为下列形式：

$$\sum_{m=1}^{M}([H]_m\{u\}_m - [K]_m\{p\}_m) = \{f\} \tag{12.108}$$

式中 $\{u\}_m = [u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_z]^T_m$

$\{p\}_m = [p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_z]^T_m$

$$[H]_m = [C]^B_m + [\widetilde{H}]_m \tag{12.109}$$

$$[\widetilde{H}]_m=[\widetilde{H}_{ji}]_m \qquad [K]_m=[K_{ji}]_m \tag{12.110}$$

$$[C]_m=diag(C_0,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_z) \tag{12.111}$$

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{H}_{ji}&=\int_{\Gamma_m}p^*(s_j,s)\phi_i(s)r(s)d\Gamma\\K_{ji}&=\int_{\Gamma_m}u^*(s_j,s)\phi_i(s)r(s)d\Gamma\end{aligned}\right\} \tag{12.112}$$

$$\{f\}=[f(s_0)\quad f(s_1)\quad f(s_2)\ \cdots\ f(s_N)]^T \tag{12.113}$$

$$f(s_j)=\int_\Omega u^*(s_j,Q)b(Q)r(Q)d\Omega \tag{12.114}$$

其中 $b=[b_r\quad b_\theta\quad b_z]^T$

式（12.112）所示的积分可以利用高斯求积公式进行计算；$[C]_m^B$为$[C]_m$扩大的$3(N+1)(z+1)$的矩阵；式（12.114）所示区域积分可以化为边界积分。由式（12.108）可得：

$$[H]\{u\}=[K]\{p\}+\{f\} \tag{12.115}$$

式中 $\{u\}=[\{u\}_1^T\ \{u\}_2^T\ \cdots\ \{u\}_M^T]^T$

$\{p\}=[\{p\}_1^T\ \{p\}_2^T\ \cdots\ \{p\}_M^T]^T$

$$\left.\begin{aligned}[H]&=[[H]_1\ [H]_2\ \cdots\ [H]_M]\\ [K]&=[[K]_1\ [K]_2\ \cdots\ [K]_M]\end{aligned}\right\} \tag{12.116}$$

式（12.115）是样条边界元法的计算格式。建立样条边界元法的计算格式有好多种方法，本节只介绍上述一种方法，其余的方法在第一章至第十一章已介绍，可以仿照应用。

利用式（12.115）可以求出轴对称体的边界未知量。当边界未知量确定后，利用相应的公式可以求出轴对称体的位移和应力值。计算结果表明，利用样条边界元法计算轴对称体问题是一个行之有效的方法。圆柱厚壳是一个空心的轴对称体。因此利用样条边界元法计算圆柱厚壳是一个行之有效的方法。

轴对称问题边界元法的有关问题，在文献[4]、[5]和[8]中

已介绍，可供参考。

（四）在任意荷载作用下的轴对称体

如果轴对称体表面受任意荷载作用，则式（12.81）中的边界未知量和基本解可以展开成Fourier级数：

$$u(\widetilde{P}) = \sum_{n=0}^{\infty}(u_n^c(P)\cos n\psi + u_n^s(P)\sin n\psi) \quad (12.117)$$

$$v(\widetilde{Q}) = \sum_{n=0}^{\infty}(v_n^c(Q)\cos n\theta + v_n^s(Q)\sin n\theta) \quad (12.118)$$

$$V(\widetilde{P},\widetilde{Q}) = \sum_{n=0}^{\infty}(V_n^c(P,Q)\cos n\varphi + V_n^s(P,Q)\sin n\varphi) \quad (12.119)$$

$$b(\widetilde{Q}) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n^c(Q)\cos n\theta + b_n^s(Q)\sin n\theta) \quad (12.120)$$

式中$\varphi=\theta-\psi$；$v=u$，p；$V=U^*$，P^*

如果物体是轴对称的，则式（12.81）可变为

$$C(\widetilde{P})u(\widetilde{P}) = \int_\Gamma\int_0^{2\pi}[U^*(\widetilde{P},\widetilde{Q}_0)p(\widetilde{Q}_0) - P^*(\widetilde{P},\widetilde{Q}_0)u(\widetilde{Q}_0)]r(Q_0)d\theta d\Gamma + \int_\Omega\int_0^{2\pi}U^*(\widetilde{P},\widetilde{Q})b(\widetilde{Q})r(Q)d\theta d\Omega \quad (12.121)$$

将式（12.117）～式（12.120）代入式（12.121），并考虑三角函数的正交性，则式（12.121）可变为

$$C(P)u_n^c(P) + \pi\int[P_n^{*c}(P,Q_0)u_n^c(Q_0) + P_n^{*s}(P,Q_0)u_n^s(Q_0)]r(Q_0)d\Gamma$$

$$= \pi\int_\Gamma[U_n^{*c}(P,Q_0)p_n^c(Q_0)$$

$$+ U_n^{*s}(P,Q_0)p_n^s(Q_0)]r(Q_0)d\Gamma$$

$$+\pi\int_{\Omega}[U_n^{*c}(P,Q)b_n^c(Q)$$

$$+ U_n^{*s}(P,Q)b_n^s(Q)]r(Q)d\Omega \qquad (12.122)$$

$$C(P)u_n^s(P)+\pi\int_{\Gamma}[\overset{*}{P}{}_n^c(P,Q_0)u_n^s(Q_0)$$

$$- P_n^{*s}(P,Q_0)u_n^c(Q_0)]r(Q_0)d\Gamma$$

$$=\pi\int_{\Gamma}[U_n^{*c}(P,Q_0)p_n^s(Q_0)$$

$$- U_n^{*s}(P,Q_0)p_n^c(Q_0)]r(Q_0)d\Gamma$$

$$+\pi\int_{\Omega}[U_n^{*c}(P,Q)b^s(Q)$$

$$- U_n^{*s}(P,Q)b^c(Q)]r(Q)d\Omega \qquad (12.123)$$

式中

$$\left.\begin{array}{l} u_n^j=[u_{rn}^j \quad u_{\theta n}^j \quad u_{zn}^j]^{\mathrm{T}} \\ p_n^j=[p_{rn}^j \quad p_{\theta n}^j \quad p_{zn}^j]^{\mathrm{T}} \\ b_n^j=[b_{rn}^j \quad b_{\theta n}^j \quad b_{zn}^j]^{\mathrm{T}} \end{array}\right\} j=c,s \qquad (12.124)$$

$$U_n^{*c}=\begin{bmatrix} U_{rrn}^{*c} & 0 & U_{rzn}^{*c} \\ 0 & U_{\theta\theta n}^{*c} & 0 \\ U_{zrn}^{*c} & 0 & U_{zzn}^{*c} \end{bmatrix} \qquad (12.125)$$

$$U_n^{*s}=\begin{bmatrix} 0 & U_{r\theta n}^{*s} & 0 \\ U_{\theta rn}^{*s} & 0 & U_{\theta zn}^{*s} \\ 0 & U_{z\theta n}^{*s} & 0 \end{bmatrix} \qquad (12.126)$$

$$P_n^{*c}=\begin{bmatrix} P_{rrn}^{*c} & 0 & P_{rzn}^{*c} \\ 0 & P_{\theta\theta n}^{*c} & 0 \\ P_{zrn}^{*c} & 0 & P_{zzn}^{*c} \end{bmatrix} \tag{12.127}$$

$$P_n^{*s}=\begin{bmatrix} 0 & P_{r\theta n}^{*s} & 0 \\ P_{\theta rn}^{*s} & 0 & P_{\theta zn}^{*s} \\ 0 & P_{z\theta n}^{*s} & 0 \end{bmatrix} \tag{12.128}$$

式中V_{kln}^{*c}和V_{kln}^{*s}为基本解V_{kl}^{*}的Fourier级数的系数，由下列公式决定：

$$\left.\begin{aligned} V_{kln}^{c} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V_{kl}\cos n\theta d\theta \\ V_{kln}^{s} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V_{kl}\sin n\theta d\theta \end{aligned}\right\} k,l=r,\theta,z \tag{12.129}$$

式中$V=U^*$，P^*。

b_{kn}^c及b_{kn}^s为体力b_k的Fourier级数的系数，即

$$\left.\begin{aligned} b_{kn}^{c} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b_k\cos n\theta d\theta \\ b_{kn}^{s} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b_k\sin n\theta d\theta \end{aligned}\right\} k=r,\theta,z \tag{12.130}$$

式中b_r及b_z是θ的偶函数，b_θ是θ的奇函数，$b_r\sin n\theta$、$b_\theta\cos n\theta$及$b_z\sin n\theta$为θ的奇函数。由上述可知，如果物体是轴对称的，则

$$\left.\begin{aligned} b_{kn}^{c} &= 0, \quad k=\theta \\ b_{kn}^{s} &= 0, \quad k=r,z \end{aligned}\right\} \tag{12.131}$$

将式（12.122）和式（12.123）中的第二个方程互换便得：

$$C(P)u_n^A(P)=\pi\int_\Gamma u_n^{*A}(P,Q_0)p_n^A(Q_0)$$

$$-p_n^{*A}(P,Q_0)u_n^A(Q_0)]r(Q_0)d\Gamma$$

$$+\pi\int_\Omega u_n^{*A}(P,Q)\,b_n^A(Q)r(Q)d\Omega \tag{12.132}$$

$$C(P)u_n^B(P)=\pi\int_\Gamma u_n^{*B}(P,Q_0)p_n^B(Q_0)$$

$$-p_n^{*B}(P,Q_0)u_n^B(Q_0)]r(Q_0)d\Gamma$$

$$+\pi\int_\Omega u_n{}^{*B}(P,Q)b_n^B(Q)r(Q)d\Omega \tag{12.133}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} u_n^A&=[u_{rn}^c\quad u_{\theta n}^s\quad u_{zn}^c]^T\\ u_n^B&=[u_{rn}^s\quad u_{\theta n}^c\quad u_{zn}^s]^T\end{aligned}\right\} \tag{12.134}$$

$$\left.\begin{aligned} p_n^A&=[p_{rn}^c\quad p_{\theta n}^s\quad p_{zn}^c]^T\\ p_n^B&=[p_{rn}^s\quad p_{\theta n}^c\quad p_{zn}^s]^T\end{aligned}\right\} \tag{12.135}$$

$$u_n^{*A}=\begin{bmatrix} U_{rrn}^{*} & U_{r\theta n}^{*s} & U_{rzn}^{*c}\\ -U_{\theta rn}^{*s} & U_{\theta\theta n}^{*c} & -U_{\theta zn}^{*s}\\ U_{zrn}^{*c} & U_{z\theta n}^{*s} & U_{zzn}^{*c}\end{bmatrix} \tag{12.136}$$

$$u_n^{*B}=\begin{bmatrix} U_{rrn}^{*c} & -U_{r\theta n}^{*s} & U_{rzn}^{*c}\\ U_{\theta rn}^{*s} & U_{\theta\theta n}^{*c} & U_{\theta zn}^{*s}\\ U_{zrn}^{*c} & -U_{z\theta n}^{*s} & U_{zzn}^{*c}\end{bmatrix} \tag{12.137}$$

$$
p_n^{*A}=\begin{bmatrix} P^{*c}_{rrn} & P^{*s}_{r\theta n} & P^{*c}_{rzn} \\ -P^{*s}_{\theta rn} & P^{*c}_{\theta\theta n} & -P^{*s}_{\theta zn} \\ P^{*c}_{zrn} & P^{*s}_{z\theta n} & P^{*c}_{zzn} \end{bmatrix} \tag{12.138}
$$

$$
p_n^{*B}=\begin{bmatrix} P^{*c}_{rrn} & -P^{*s}_{r\theta n} & P^{*c}_{rzn} \\ P^{*s}_{\theta rn} & P^{*c}_{\theta\theta n} & P^{*s}_{\theta zn} \\ P^{*c}_{zrn} & -P^{*s}_{z\theta n} & P^{*c}_{zzn} \end{bmatrix} \tag{12.139}
$$

$$
\left.\begin{aligned} b_n^A&=[b^c_{rn} \quad b^s_{\theta n} \quad b^c_{zn}]^T \\ b_n^B&=[b^s_{rn} \quad b^c_{\theta n} \quad b^s_{zn}]^T \end{aligned}\right\} \tag{12.140}
$$

由上述可知，式（12.132）代表轴对称问题，式（12.133）代表轴反对称问题。由于物体是轴对称的，体力应该是轴对称的，因此$b_n^B=0$。故式（12.133）等号右边的区域积分为零。

在上述各式中，Ω及Γ在 r^+-z 半平面内，与式（12.87）中的Ω及Γ相同（图12.12）。

利用式(12.132）和式（12.133）求出u^c_{kn}、u^s_{kn}及p^c_{kn}、p^s_{kn}后，即可利用式（12.118）求出边界未知量。如果用三次B样条函数来逼近u^j_{kn}及p^j_{kn}，则由式（12.132）及式（12.133）可以建立样条边界元法的计算格式。式中边界已知量u^j_n和p^j_n由Fourier级数的系数公式确定。

§12.5 流体与固体的耦合问题

流体与固体相互作用的问题在四个现代化建设中经常遇到。

例如，水与船的相互作用；水与坝的相互作用；流体与容器的相互作用。本节以流体与容器的相互作用为例，介绍流体与固体耦合问题的样条边界元——能量配点法。图12.15是一个贮液容器，盛于容器中的液体在垂直于容器壁的方向上产生压力。因此，容器在地震或动力作用下，除了受到容器本身的惯性力和液体的静压力外，它的底部及侧壁上还受到贮存在容器中的液体所产生的液动压力。本节假设容器是一个旋转壳体。



图12.15

（一）样条边界元法分析液动压力

1. 基本公式

如果流体的运动是无旋的，则流速与速度势$\varphi(r, \theta, z, t)$有下列关系：

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r},\quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta},\quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{12.141}$$

如果容器中的流体是不可压缩的和无粘性的，而且它的运动是无旋的，则利用流体的运动方程可得：

$$p = -\rho_1\left(gz + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \tag{12.142}$$

利用流体的连续方程可得：

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{12.143}$$

式中p为流体中的压力；ρ_1为流体密度，t为时间，g为重力加速

度。

对于理想不可压缩流体，本节给出下列边界条件：

（1）不动墙的边界条件——流体速度在墙上的法向分量为零，即

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{12.144}$$

（2）可动墙的边界条件——在墙的法线方向上，流体速度与墙的运动速度相等，即

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_{0n} \tag{12.145}$$

式中v_{0n}是墙体运动速度v_0在墙的法线方向n上的分量。

（3）在流体自由表面上，压力$p = 0$。

由上述可知，利用式(12.143)和边界条件可求出速度势φ。当φ确定后，利用式（12.141）和式（12.142）可求出流速及液动压力。本节利用样条边界元法求解速度势φ的值。

2. 边界积分方程

在实际中，许多容器的几何形状是轴对称的，因此本节介绍轴对称容器与流体的相互作用。在轴对称容器中，液体是一个轴对称体。

在圆柱坐标系（r,θ,z）中，Laplace问题的边界积分方程可以写成下列形式：

$$C(\widetilde{P})\varphi(\widetilde{P},t) = \int_\Gamma \int_0^{2\pi} [\overline{\varphi}^*(\widetilde{P},\widetilde{Q}_0)q(\widetilde{Q}_0,t) - \overline{q}^*(\widetilde{P},\widetilde{Q}_0)\varphi(\widetilde{Q}_0,t)] r(Q_0)\,d\theta\,d\Gamma \tag{12.146}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \overline{\varphi}^*(\widetilde{P},\widetilde{Q}) &= 1/R(\widetilde{P},\widetilde{Q}) \\ \overline{q}^*(\widetilde{P},\widetilde{Q}) &= \partial\overline{\varphi}^*(\widetilde{P},\widetilde{Q})/\partial n(\widetilde{Q}) \end{aligned}\right\} \tag{12.147}$$

$$R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho(\theta - \psi) + (z - \xi)_2 \qquad (12.148)$$

式中r，ρ，θ，ψ，z及ξ如图12.10所示；$\phi = \theta - \psi$。

（1）轴对称问题。如果液体是一个轴对称体，而且作轴对称运动，则式（12.146）可变为下列形式：

$$C(P)\varphi(P,t) = \int_\Gamma [\varphi^*(P,Q_0)q(Q_0,t) - q^*(P,Q_0)\varphi(Q_0,t)]r(Q_0)d\Gamma \qquad (12.149)$$

式中 $P = (\rho, \xi) \qquad Q_0 = (r, z)$

$$\left.\begin{aligned} \varphi^*(P,Q_0) &= \int_0^{2\pi} \overline{\varphi}^*(\widetilde{P}, \widetilde{Q})d\theta \\ q^*(P,Q_0) &= \int_0^{2\pi} \overline{q}^*(\widetilde{P}, \widetilde{Q}_0)d\theta \end{aligned}\right\} \qquad (12.150)$$

由式（12.50）及式（12.147）可得：

$$\varphi^*(P,Q_0) = 4J/(a+b)^{\frac{1}{2}} \qquad (12.151)$$

$$q^*(P,Q_0) = \frac{4}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{2r}\left[\frac{r^2 - \rho^2 + (z-\xi)^2}{a-b}B - J\right]n_r(Q_0) + \frac{z-\xi}{a-b}Bn_z(Q_0)\right\} \qquad (12.152)$$

式中
$$\left.\begin{aligned} a &= r^2 + \rho^2 + (z-\xi)^2 \\ b &= 2r\rho \end{aligned}\right\} \qquad (12.153)$$

B和J是全椭圆积分，由式（12.96）决定，这时h由下列公式决定：

$$h = 2b/(a+b) \qquad (12.154)$$

由上述可知，当$r \to 0$时，则$m \to 0$，$B \to \pi/2$，$J \to \pi/2$。

为简化计算，式（12.146）中的基本解可采用下列形式：

$$\varphi^*(P,Q) = \left(2\sqrt{\frac{2}{b}}\right)Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma) \qquad (12.155)$$

$$q^{*}=-\frac{2}{r}\sqrt{\frac{2}{b}}\left\{\left[\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{r^{2}-\rho^{2}+(z-\xi)^{2}}{b}\frac{dQ_{-\frac{1}{2}}(\gamma)}{d\gamma}\right]n_{r}(Q)$$

$$\left.+\frac{z-\xi}{\rho}\frac{dQ_{-\frac{1}{2}}(\gamma)}{d\gamma}n_{z}(Q)\right\} \tag{12.156}$$

式中$Q_{-\frac{1}{2}}$为Legendre函数[4]，由下列公式决定：

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\gamma-1}{32}\right) \tag{12.157}$$

$$\frac{dQ_{-\frac{1}{2}}(\gamma)}{d\gamma}=\frac{1}{2(\gamma-1)} \tag{12.158}$$

式中 $\gamma=1+(a-b)/b,\ 1\leqslant\gamma\leqslant\infty$ (12.159)

（2）非轴对称运动。如果液体是一个轴对称体，但作非轴对称运动，则式（12.146）中的边界未知量和基本解可以展开成Fourier级数：

$$\varphi(\widetilde{P},t)=\sum_{k=0}^{\infty}[\varphi_k^c(P,t)\cos k\psi+\varphi_k^s(P,t)\sin k\psi] \tag{12.160}$$

$$v(\widetilde{Q},t)=\sum_{k=0}^{\infty}[v_k^c(Q,t)\cos k\theta+v_k^s(Q,t)\sin k\theta] \tag{12.161}$$

$$\overline{v}^{*}(\widetilde{P},\widetilde{Q})=\sum_{k=0}^{\infty}[v_k^{*c}(P,Q)\cos k\phi+v_k^{*s}(P,Q)\sin k\phi] \tag{12.162}$$

式中$v=\varphi,q$。将式（12.160）～式（12.162）代入式（12.146）可得：

$$C(P)\varphi_k^c(P,t)=\int_{\Gamma}[\varphi_k^{*c}(P,s)q_k^c(s,t)$$

$$+\varphi_k^{*s}(P,s)q_k^s(s,t)-q_k^{*c}(P,s)\varphi_k^c(s,t)$$

$$-q_k^{*e}(P,s)\varphi_k^e(s,t)]r(s)d\Gamma \quad (12.163)$$

$$C(P)\varphi_k^e(P,t)=\int_\Gamma[\varphi_k^{*c}(P,s)q_k^c(s,t)$$

$$-\varphi_k^{*e}(P,s)q_k^c(s,t)-q_k^{*c}(P,s)\varphi_k^e(s,t)$$

$$+q_k^{*e}(P,s)\varphi_k^e(s,t)]r(s)d\Gamma \quad (12.164)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} v_k^{*c}(P,s)&=\int_{-\pi}^{\pi}\overline{v}^*\cos k\theta d\theta \\ v_k^{*e}(P,s)&=\int_{-\pi}^{\pi}\overline{v}^*\sin k\theta d\theta \end{aligned}\right\} \quad (12.165)$$

由上述可知，式（12.163）和式（12.164）对流体作任意运动都适用。当$k=0$时，则上述各式可用于轴对称运动。对于任意运动，式（12.160）～式（12.162）适当选择前几项就可满足精度的要求。

如果流体是一个轴对称体，但作非轴对称运动，则式（12.146）中的边界未知量和边界已知量也可采用下列形式：

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\widetilde{P},t)&=\sum_{k=0}^{R}\varphi_k(P,t)\cos k\psi \\ v(\widetilde{P},t)&=\sum_{k=0}^{R}v_k(P,t)\cos k\theta \end{aligned}\right\} \quad (12.166)$$

式中$v=\varphi,q$。将式（12.166）代入式（12.146）中可得：

$$\sum_{k=0}^{R}C(P)\varphi_k(P,t)\cos k\psi=\sum_{k=0}^{R}\left(\int_\Gamma[\varphi_k^*(P,s)q_k(s,t)\right.$$

$$-q_k^*(P,s)\varphi_k(s,t)]r(s)d\Gamma$$

$$(12.167)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k^*(P,s)&=\int_0^{2\pi}\overline{\varphi}^*\cos k\theta d\theta \\ q_k^*(P,s)&=\int_0^{2\pi}\overline{q}^*\cos k\theta d\theta \end{aligned}\right\} \quad (12.168)$$

利用式（12.167）可求出$\varphi_k(s,t)$和$q_k(s,t)$。当φ_k和q_k确定后，利用式（12.166）可求出$\varphi(P,t)$。

3. 样条边界元法

如果将整个边界Γ分为M个部分，则式（12.167）可变为

$$C(P)\varphi_k(P,t)\cos k\beta = \sum_{m=1}^{M}\left(\int_{\Gamma_m}[\varphi_k^*(P,s)q_k(s,t) - q_k^*(P,s)\varphi_k(s,t)]r(s)d\Gamma\right) \tag{12.169}$$

如果用三次B样条函数逼近φ_k及q_k，则

$$\left.\begin{aligned}\varphi_k(s,t)&=[\phi(s)]\{\varphi_k(t)\}_m\\ q_k(s,t)&=[\phi(s)]\{q_k(t)\}_m\end{aligned}\right\} \tag{12.170}$$

式中 $\{\varphi_k\}_m=[\varphi_{k0}\quad \varphi_{k1}\quad \varphi_{k2}\ \cdots\ \varphi_{kz}]_m^T$

$\{q_k\}_m=[q_{k0}\quad q_{k1}\quad q_{k2}\ \cdots\ q_{kz}]_m^T$

$[\phi]=[\phi_0\quad \phi_1\quad \phi_2\ \cdots\ \phi_z]$

其中$z=N_m$；s为边界Γ的弧坐标；ϕ_i为B样条函数构成的基函数，$i=0,1,2,\cdots z$；$\varphi_{ki}=\varphi_{ki}(t)$，$q_{ki}=q_{ki}(t)$。

将式（12.170）代入式（12.169）可得：

$$C_j\varphi_{kj}\cos k\beta = \sum_{m=1}^{M}([K_k]_m\{q_k\}_m-[\widetilde{H}_k]_m\{\varphi_k\}_m) \tag{12.171}$$

式中 $$C_j=C(s_j)\qquad j=0,1,2,\cdots,N \tag{12.172}$$

$$\left.\begin{aligned}[\widetilde{H}_k]_m&=\int_{\Gamma_m}q_k^*(s_j,s)[\phi(s)]r(s)d\Gamma\\ [K_k]_m&=\int_{\Gamma_m}\varphi_k^*(s_j,s)[\phi(s)]r(s)d\Gamma\end{aligned}\right\} \tag{12.173}$$

式（12.167）也可以写成下列形式：

$$\sum_{k=0}^{R}C_j\varphi_{kj}\cos k\beta_n = \sum_{k=0}^{R}\sum_{m=1}^{M}([K_k]_m\{q_k\}_m-[\widetilde{H}_k]_m\{\varphi_k\}_m) \tag{12.174}$$

式中$n=0,1,2,\cdots,R$；ψ_n为平行圆上第n点的极坐标，即

$$\psi_n = 2n\pi/(1+R) \qquad n=0,1,2,\cdots,R \qquad (12.175)$$

由式（12.174）可得：

$$\sum_{k=0}^{R}[C]\{\varphi_k\}\cos k\psi_n = \sum_{k=0}^{R}([K_k]\{q_k\} - [\widetilde{H}_k]\{\varphi_k\}) \qquad (12.176)$$

式中$n=0,1,2,\cdots,R$。式（12.176）也可以写成下列形式：

$$[C]\{\varphi_k\}\cos k\psi = ([K_k]\{q_k\} - [\widetilde{H}_k]\{\varphi_k\}) \qquad (12.177)$$

式（12.176）和式（12.177）与边界条件有关，式中边界已知量的φ_k和q_k由φ和q的Fourier级数的系数确定。在式（12.176）或式（12.177）中引入边界条件后可得：

$$[A]\{X\} = \{f\} \qquad (12.178)$$

利用式（12.178）可求出未知的φ_k及q_k。当φ_k及q_k确定后，利用式（12.142）可求出动液压力：

$$p = -\rho_1\left(gz + \sum_{k=0}^{R}\dot{\varphi}_k(s,t)\cos k\theta \right) \qquad (12.179)$$

将式（12.170）代入式（12.179）可得：

$$p = -\rho_1\left(gz + \sum_{k=0}^{R}[\phi(s)]\{\dot{\varphi}_k\}\cos k\theta \right) \qquad (12.180)$$

式中 $\dot{\varphi}_k = \partial\varphi_k/\partial t$

（二）样条能量配点法建立容器的动力方程

本节假设容器是一个轴对称的旋转薄壳（图12.16），在旋转面上任一点Q的坐标为

$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ x_3 = z$$

设e_s、e_t及e_n分别为Q点的子午线切向量、平行圆切向量和旋转曲向法向量，它们与e_r、e_θ及e_z有下列关系：

$$\begin{Bmatrix} e_s \\ e_t \\ e_n \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} e_z \\ e_\theta \\ e_r \end{Bmatrix} \qquad (12.181)$$

式中$[T]$是变换矩阵，即

$$[T] = \begin{bmatrix} -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \qquad (12.182)$$

$$[T]^{-1} = [T] \qquad (12.183)$$

设u_s、u_t和u_n分别为旋转薄壳中面上任一点Q对应于e_s、e_t和e_n方向的位移分量，它们与u_r、u_θ和u_z有下列关系：

$$\{U\} = [T]\{u\} \qquad (12.184)$$

式中 $\{U\} = [u_s \quad u_t \quad u_n]^T$

$\{u\} = [u_z \quad u_\theta \quad u_r]^T$

其中u_r、u_θ及u_z分别为旋转薄壳中面上任点Q对应于r、θ及z方向的位移分量，它们不仅与空间位置有关，而且还与时间t有关。

根根达朗贝尔原理，薄壳动力问题的势能泛函可写成下列形式：

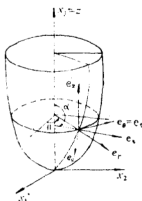


图 12.16

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega [\{\varepsilon\}^T[R]\{\varepsilon\} + \{x\}^T[D]\{x\} - 2\{U\}^T(\{P\}$$

$$- \rho_2 h\{\ddot{U}\})]d\Omega \qquad (12.185)$$

式中 $\{\varepsilon\} = [L_1]\{U\} = [L_1][T]\{u\} \qquad (12.186)$

$\{x\} = [L_2]\{U\} = [L_2][T]\{u\} \qquad (12.187)$

$\{P\} = [p_s \quad p_t \quad p_n]^T \qquad (12.188)$

$$[R]=\begin{bmatrix} R_s & R_1 & 0 \\ R_1 & R_t & 0 \\ 0 & 0 & R_{sn} \end{bmatrix} \tag{12.189}$$

$$[D]=\begin{bmatrix} D_s & D_1 & 0 \\ D_1 & D_t & 0 \\ 0 & 0 & D_{st} \end{bmatrix} \tag{12.190}$$

对于各项同性体，则

$$R_s = R_t = Eh/(1-\mu^2) \qquad R_1 = \mu R$$

$$R_{st} = Eh/2(1+\mu) \qquad D_{st} = Eh^3/12(1+\mu)$$

$$D_s = D_t = Eh^3/12(1-\mu^2) \qquad D_1 = \mu D \tag{12.191}$$

$[L_1]$及$[L_2]$的具体形式为

$$[L_1]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial s} & 0 & \dfrac{1}{r_0} \\ \dfrac{\cos\alpha}{r} & \dfrac{\partial}{r\partial\theta} & \dfrac{\sin\alpha}{r} \\ \dfrac{\partial}{r\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial s}-\dfrac{\cos\alpha}{r} & 0 \end{bmatrix} \tag{12.192}$$

$$[L_2]=\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \tag{12.183}$$

式中 $L_{11}=\dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial s}-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{r_0}\right) \qquad L_{12}=0$ ，

$$L_{13}=-\frac{\partial^2}{\partial s^2} \qquad L_{21}=\frac{\cos\alpha}{r_0 r} \qquad L_{22}=\frac{\sin\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{23}=-\frac{\cos\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} \qquad L_{31}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{r\partial\theta}$$

$$L_{s2}=\frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{r^2}$$

$$L_{s3}=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial s\partial\theta}+\frac{\cos\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{12.194}$$

在上述各式中，ρ_2为壳体材料密度；h为壳体的厚度，r_0为子午线的曲率半径；p_s、p_t及p_n为壳体的面力；α为z轴与中曲面法线n之间的夹角。

如果设

$$\left.\begin{aligned}u_r&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(s)]\{u_r(t)\}_k\cos k\theta\\u_\theta&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(s)]\{u_\theta(t)\}_k\sin k\theta\\u_z&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(s)]\{u_z(t)\}_k\cos k\theta\end{aligned}\right\} \tag{12.195}$$

则

$$\{u\}=\sum_{k=0}^{R}[N]_k\{\delta\}_k \tag{12.196}$$

式中

$$[N]_k=\mathrm{diag}([\phi]\cos k\theta,[\phi]\sin k\theta,[\phi]\cos k\theta) \tag{12.197}$$

$$\{\delta\}_k=[\{u_z\}_k^T\quad\{u_\theta\}_k^T\quad\{u_r\}_k^T]^T$$

$$\{u_j\}=[u_{j0}\quad u_{j1}\quad u_{j2}\quad\cdots\quad u_{jz}]^T\quad j=r,\ \theta,\ z$$

将式(12.196)代入式(12.184)、式(12.186)及式(12.187)便得：

$$\left.\begin{aligned}\{U\}&=[T]\sum_{k=0}^{R}[N]_k\{\delta\}_k\\\{\varepsilon\}&=\sum_{k=0}^{R}[S]_k[A]_k\{\delta\}_k\\\{\chi\}&=\sum_{k=0}^{R}[S]_k[B]_k\{\delta\}_k\end{aligned}\right\} \tag{12.198}$$

式中 $[S]_k = \mathrm{diag}(\cos k\theta,\ \cos k\theta,\ \sin k\theta)$ (12.199)

$$[A]_k = \begin{bmatrix} -[\phi']\sin\alpha & [0] & \frac{\cos\alpha}{r}[\phi'] \\ [0] & \frac{k}{r}[\phi] & \frac{1}{r}[\phi] \\ [\phi]\frac{k\sin\alpha}{r} & [\phi'] - \frac{\cos\alpha}{r}[\phi] & -\frac{k\cos\alpha}{r}[\phi] \end{bmatrix} \tag{12.200}$$

$$[B_k] = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \tag{12.201}$$

式中 $B_{11} = \frac{\sin\alpha}{r_0}[\phi'] - \cos\alpha[\phi''],\ B_{12} = [0]$

$$B_{13} = \frac{\cos\alpha}{r}[\phi'] - [\phi'']\sin\alpha,\ B_{22} = \frac{k\sin\alpha}{r^2}[\phi]$$

$$B_{21} = \frac{k^2\cos\alpha}{r^2}[\phi] - \frac{\cos^2\alpha}{r}[\phi']$$

$$B_{23} = \frac{k^2\sin\alpha}{r^2}[\phi] - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r}[\phi']$$

$$B_{31} = k\left(\frac{\cos\alpha}{r}[\phi'] - \frac{\cos^2\alpha}{r^2}[\phi]\right)$$

$$B_{32} = \frac{\sin\alpha}{r}[\phi'] - \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{r^2}[\phi]$$

$$B_{33} = kB_{32} \tag{12.202}$$

其中ϕ'是$\phi(s)$对s的一阶导数，ϕ''是$\phi(s)$对s的二阶导数。$\phi(s)$必须满足薄壳子午线方向的边界条件。

将式（12.198）代入式（12.185）并考虑三角函数的正交性可得：

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{R}[\{\delta\}_k^T[K]_k\{\delta\}_k - 2\{\delta\}_k^T(\{f\}_k - [M]_k\{\ddot{\delta}\}_k)]$$

$$(12.203)$$

利用变分原理可得旋转薄壳的动力方程：

$$[M]_k\{\ddot{\delta}\}_k + [K]_k\{\delta\}_k = \{f\}_k \quad k = 0,1,\cdots,R \quad (12.204)$$

式中 $\{f\}_k = \int_\Gamma(\int_0^{2\pi}[N]_k^T[T]\{P\}d\theta)r(s)d\Gamma \quad (12.205)$

$$[K]_k = \int_\Gamma(\int_0^{2\pi}[([S]_k[A]_k)^T[R]([S]_k[A]_k)$$

$$+([S]_k[B]_k)^T[D]([S]_k[B]_k)]d\theta)r(s)d\Gamma \quad (12.206)$$

$$[M]_k = \int_\Gamma \rho_2 h(\int_0^{2\pi}[N]_k^T[N]_k d\theta)r(s)d\Gamma \quad (12.207)$$

由此可得：

$$[K]_k = \alpha_k\int_\Gamma([A]_k^T[R][A]_k + [B]_k^T[D][B]_k)r(s)d\Gamma$$

$$(12.208)$$

$$[M]_k = \alpha_k\int_\Gamma[N]^T[N]\rho_2 hr(s)d\Gamma \quad (12.209)$$

式中α_k由下列公式确定，

$$\alpha_k = \begin{cases} 2\pi & k = 0 \\ \pi & k \neq 0 \end{cases} \quad (12.210)$$

$[N] = \mathrm{diag}([\phi], [\phi], [\phi])$

Γ表示薄壳中曲面上的子午线长度。

利用数值积分法中的求积公式（例如，梯形公式，辛普生公式，高斯求积公式）也可将式（12.204）、式（12.208）和式（12.209）变为配点格式[11]。

如果考虑薄壳振动时有阻尼，则薄壳的动力方程可写成下列形式：

$$[M]_k\{\ddot{\delta}\}_k+[C]_k\{\dot{\delta}\}_k+[K]_k\{\delta\}_k=\{f\}_k \qquad (12.211)$$

式中$k=0, 1, 2, \cdots, R$；$[M]$、$[C]$及$[K]$分别为薄壳的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。阻尼矩阵可利用质量矩阵和刚度矩阵确定。为了书写方便，可以将式（12.211）中的下标k去掉

式（12.211）是根据式（12.195）所示的对称位移表达式建立起来的，但对于反对称位移的情况也可以用。对于旋转薄壳，反对称位移表达式为

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \sum_{k=0}^{R}[\phi]\{u_r\}_k \sin k\theta \\ u_\theta &= \sum_{k=0}^{R}[\phi]\{u_\theta\}_k \cos k\theta \\ u_z &= \sum_{k=0}^{R}[\phi]\{u_z\}_k \sin k\theta \end{aligned}\right\} \qquad (12.212)$$

由上述可知，利用公式（12.211）求解反对称问题时，上述各式中的$\sin k\theta$必须换为$\cos k\theta$，而$\cos k\theta$必须换为$\sin k\theta$；$[A]_k$和$[B]_k$中的k因子应换为（$-k$）。

在旋转薄壳中，非对称的位移可以分解为对称位移和反对称位移，而且对称位移和反对称位移可以分别求解。

（三）建立流体与容器的耦合动力方程

当发生地震时，壳体的动力方程为

$$[M]\{\ddot{\delta}_a\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{f\} \qquad (12.213)$$

式中$\{\ddot{\delta}_a\}$为壳体绝对加速度向量，它等于地面加度向量加上壳体相对于地面的加速度向量，即

$$\{\ddot{\delta}_a\}=\{\ddot{\delta}_g\}+\{\ddot{\delta}\} \qquad (12.214)$$

式中$\{\ddot{\delta}_g\}$为地面加速度向量，

$\{\ddot{\delta}\}$为壳体相对于地面的加速度向量。

将式（12.214）代入式（12.213）可得：

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{F\} \qquad (12.215)$$

式中 $\{F\}=\{f\}-[M]\{\ddot{\delta}_g\}$ (12.216)

$$\{f\}=\int_{\Gamma}\left(\int_0^{2\pi}[N]_k^T[T]\{P\}d\theta\right)r(s)d\Gamma \qquad (12.217)$$

式中$\{P\}$为流体动压力，简称液动压力。

由于流体只在容器壁垂直方向产生压力，则液动压力向量为

$$\{P\}=[0 \quad 0 \quad p]^T \qquad (12.215)$$

式中p为垂直容器壁的动液压力。

如果不计流体重力的影响，由式(12.179)可得动液压力：

$$p=-\rho_1\sum_{k=0}^{p}[\phi](s)]\{\dot{\varphi}\}\cos k\theta \qquad (12.219)$$

由式（12·177）可得：

$$\{\dot{\varphi}_k\}=[V]\{\dot{u}_n\}_k \qquad (12.220)$$

将式（12.220）代入式（12.219）可得：

$$p=-\rho_1\sum_{k=0}^{p}[\phi(s)][V]\{\ddot{u}_n\}_{ka}\cos k\theta \qquad (12.221)$$

由此可得：

$$\{P\}=-\rho_1\sum_{k=0}^{p}[S]_k[\widetilde{V}]\{\ddot{\triangle}_a\}_k \qquad (12.222)$$

式中 $[S]_k=\mathrm{diag}(\cos k\theta,\sin k\theta,\cos k\theta)$ (12.223)

$$[\widetilde{V}]=\mathrm{diag}([0],[0],[\phi][V]) \qquad (12.224)$$

$$\{\ddot{\triangle}_a\}_k=[\{u_s\}_{ka}^T \quad \{u_t\}_{ka}^T \quad \{u_n\}_{ka}^T]^T \qquad (12.225)$$

将式（12.222）代入式（12.217）并利用配点法可得：

$$\{f\} = -\alpha_k\rho_1[W]\{\ddot{\delta}_a\}_k \tag{12.226}$$

式中 $$[W]=\begin{bmatrix} a[\cos\alpha] & [0] & a[\sin\alpha] \\ [0] & [0] & [0] \\ b[\cos\alpha] & [0] & b[\sin\alpha] \end{bmatrix} \tag{12.227}$$

$$\left.\begin{aligned} [a]&=[g]^T[\Omega][\cos\alpha][g][V] \\ [b]&=[g]^T[\Omega][\sin\alpha][g][V] \end{aligned}\right\} \tag{12.228}$$

$$\left.\begin{aligned} [\cos\alpha]&=diag(\cos\alpha_0,\ \cos\alpha_1,\cdots,\text{co}\alpha_N) \\ [\sin\alpha]&=diag(\sin\alpha_0,\ \sin\alpha_1,\cdots\sin\alpha_N) \end{aligned}\right\} \tag{12.229}$$

$$[\Omega]=[\lambda][r] \tag{12.230}$$

$$[\lambda]=\text{diag}(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_N) \tag{12.231}$$

$$\left.\begin{aligned} &[r]=\text{diag}(r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_N) \\ &r_i=r(s_i) \qquad i=0,1,\ 2,\ \cdots,\ N \end{aligned}\right\} \tag{12.232}$$

$$[g]=[\phi_i(s_l)] \qquad i,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{12.233}$$

式（12·226）可以写成下列形式

$$\{f\}=-[M_p](\{\ddot{\delta}_g\}+\{\ddot{\delta}\}) \tag{12.234}$$

式中 $$[M_p]=\alpha_k\rho_1[W] \tag{12.235}$$

将式（12·234）代入式（12·215）可得：

$$[\overline{M}]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=-[\overline{M}[\{\ddot{\delta}_g\} \tag{12.236}$$

式中 $$[\overline{M}]=[M_p]+[M] \tag{12.237}$$

由式（12.236）可知，考虑流体与容器的共同作用时，动力方程的形式不变，只是质量矩阵采用式（12.237）确定。

（四） 容器动力特性的计算

当容器自由振动时，式（12.236）等号右边为零，且不考虑

阻尼，即

$$[\overline{M}]\{\ddot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{0\} \tag{12.238}$$

设 $$\{\delta\}=\{\widetilde{\delta}\}\sin(\omega t) \tag{12.239}$$

则式（12.240）可变为

$$([K]-\omega^2[\overline{M}])\{\widetilde{\delta}\}=\{0\} \tag{12.240}$$

式中ω为自振频率。利用式（12.240）可求出容器的自振频率及振型。

（五）容器的地震反应

1．容器对地面水平运动的地震反应

发生地震时，地面水平运动引起的旋转薄壳反应只限于$k=1$的对称变形，而与$k=1$的反对称变形和$k\neq1$的对称变形、反对称变形完全无关。

2．容器对地面竖向运动的地震反应

发生地震时，地面竖向运动引起的旋转薄壳反应只限于$k=0$的对称变形，而与$k=0$的反对称变形和$k\neq0$的对称变形、反对称变形完全无关。

3．利用样条函数方法求容器的地震反应

关于求解结构动力反应的样条函数方法在文献[12]里有详细介绍，可供参考。计算结果表明，利用文献[12]的样条函数方法求解容器的地震反应是一个经济有效的方法。

§12.6 圆柱厚壳与岩土介质耦合问题

地下工程的合理设计必须考虑结构与岩土介质的共同作用。本节介绍圆柱厚壳与岩土介质的共同作用问题，这个问题有实

用意义，例如采矿工程中的竖井，国防工程中的导弹发射井，生命线工程中的管道。图12.17是一个圆柱厚壳与半无限空间介质的相互作用，这是一个三维问题。本节介绍圆柱厚壳与岩土介质耦合问题的样条边界元——能量配点法。

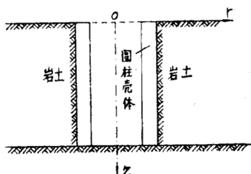


图 12.17

（一）建立圆柱厚壳的动力方程

对于各向同性的圆柱厚壳，内力与位移有下列关系：

$$
\left.\begin{aligned}
M_z &= D(\chi_z + \mu\chi_\theta) - M_0 \\
M_\theta &= D(\chi_\theta + \mu\chi_z) - M_0 \\
M_{z\theta} &= \frac{1}{2}(1-\mu)D\chi_{z\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{12.241}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
N_z &= B(\varepsilon_z + \mu\varepsilon_\theta) \\
N_\theta &= B(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z) \\
N_{z\theta} &= \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{z\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{12.242}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
Q_z &= C\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi_z\right) \\
Q_\theta &= C\left(\frac{\partial w}{r_0\partial\theta} - \psi_\theta\right)
\end{aligned}\right\} \tag{12.243}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r_0}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{w}{r_0} \\
&\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{12.244}
$$

$$\left.\begin{aligned}
x_z &= -\frac{\partial\psi_z}{\partial z} \\
x_\theta &= \frac{1}{r_0{}^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} \\
x_{z\theta} &= \frac{1}{r_0}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta}
\end{aligned}\right\} \quad (12.245)$$

$$\left.\begin{aligned}
M_z &= \frac{\mu p_r h^2}{10(1-\mu)}, \quad B = \frac{Eh}{1-\mu^2} \\
C &= \frac{5Eh}{12(1+\mu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}
\end{aligned}\right\} \quad (12.246)$$

其中r_0为圆柱厚壳中曲面的半径；u、v、w分别为壳体中曲面任一点在z、θ、r方向的位移分量；h为壳体的厚度；E为弹性模量，μ为泊松系数；p_r、p_θ及p_z分别为壳体在r、θ及z方向的面力。

由上述可得：

$$\left.\begin{aligned}
\{M\} &= [D]\{x\} \\
\{N\} &= [R]\{\varepsilon\} \\
\{Q\} &= [C]\{\gamma\}
\end{aligned}\right\} \quad (12.247)$$

式中 $\{M\} = [M_z \quad M_\theta \quad M_{z\theta}]^T$

$\{N\} = [N_z \quad N_\theta \quad N_{z\theta}]^T$

$\{Q\} = [Q_z \quad Q_\theta \quad 0\ ]^T$

$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_z \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_{z\theta}]^T$

$\{x\} = [x_z \quad x_\theta \quad x_{z\theta}]^T$

$$\{\gamma\} = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi_z\right) \quad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} - \psi_\theta\right) \quad 0\ \right]^T$$

$[C] = \mathrm{diag}(C,\ C,\ 0)$

$[R]$和$[D]$可由式(12.189)和式(12.190)确定。

根据达朗贝尔原理，圆柱厚壳动力问题的势能泛函可写成下列形式：

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Omega}[\{\varepsilon\}^{T}[R]\{\varepsilon\}+\{\chi\}^{T}[D]\{\chi\}+\{\gamma\}^{T}[C]\{\gamma\}$$

$$-2\{\chi\}^{T}\{M_{0}\}-2\{U\}^{T}(\{P\}-\rho_{2}h\{\ddot{U}\})$$

$$-2\rho_{2}J\{\psi\}^{T}\{\ddot{\psi}\}]d\Omega \qquad (12.248)$$

式中 $\{M_0\}=[M_0 \quad M_0 \quad 0]^T$

$\}U\}=[u \quad v \quad w]^T$

$\{P\}=[p_z \quad p_\theta \quad p_r]^T$

$\{\Psi\}=[\psi_z \quad \psi_\theta \quad 0]^T$

$\ddot{\psi}=\partial^2\psi/\partial t^2, \qquad \ddot{U}=\partial^2 U/\partial t^2$

$J=h^3/12$

ρ_2为壳体密度。对于厚壳，除集中荷载附近区域外，挤压变形影响小于剪切变形影响，因此在某些情况下，可以忽略挤压变形影响，令$M_0=0$。

如果设

$$\left.\begin{aligned}
u&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(z)]\{u(t)\}_k\cos k\theta\\
v&=\sum_{k=0}^{P}[\phi(z)\{v(t)\}_k\sin k\theta\\
w&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(z)]\{w(t)\}_k\cos k\theta\\
\psi_z&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(z)]\{\Psi_z(t)\}_k\cos k\theta\\
\psi_\theta&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(z)]\{\Psi_\theta(t)\}_k\sin k\theta
\end{aligned}\right\} \qquad (12.249)$$

则式(12·248)可变为

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{R}[\{\delta\}_k^T[K]_k\{\delta\}_k-2\{\delta\}_k^T(\{f\}_k-[M]_k\{\ddot{\delta}\}_k)]$$

$$(12.250)$$

式中 $\{\delta\}_k=[\{u\}_k^T \quad \{v\}_k^T \quad \{w\}_k^T \quad \{\psi_z\}_k^T \quad \{\psi_\theta\}_k^T]^T$

利用变分原理可得圆柱厚壳的动力方程：

$$[M]_k\{\ddot{\delta}\}_k+[K]_k\{\delta\}_k=\{f\}_k \quad k=0,1,\cdots,R \quad (12.251)$$

如果考虑壳体振动时有阻尼时，则圆柱厚壳的动力方程可写成下列形式：

$$[M]_k\{\ddot{\delta}\}_k+[C]_k\{\dot{\delta}\}+[K]_k\{\delta\}_k=\{f\}_k \quad (12.252)$$

式中 $$[K]_k=\alpha_k r_0\int_\Gamma([A]_k^T[G][A]_k)d\Gamma \quad (12.253)$$

$$[M]_k=\alpha_k r_0\int_\Gamma \rho_z(h[N_1]^T[N_1]+J[N_2]^T[N_2])d\Gamma \quad (12.254)$$

$$\{f\}_k=\alpha_k r_0\int_\Gamma[N]^T[B]\{p\}_k d\Gamma \quad (12.255)$$

$$[G]=\mathrm{diag}([R],\ [D],\ [C]) \quad (12.256)$$

$$[A]_k=[[A_1]^T \quad [A_2]^T \quad [A_3]^T]^T \quad (12.257)$$

$$[N]=[[N_1]^T \quad [A_2]^T]^T \quad (12.258)$$

$$[B]=\begin{pmatrix} [I] & & 0 \\ & [I] & \\ 0 & & [I] \\ & & H[E] \end{pmatrix} \quad (12.259)$$

$$[E]=\begin{bmatrix}[0] & [0] & [I] & [I] & [0]\end{bmatrix}^T \quad (12.260)$$

$H=\mu h^3/10(1-\mu)$

$$[A_1]=\begin{pmatrix} [\phi'] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & \frac{k}{r_0}[\phi] & \frac{1}{r_0}[\phi] & [0] & [0] \\ -\frac{k}{r_0}[\phi] & [\phi'] & [0] & [0] & [0] \end{pmatrix} \quad (12.261a)$$

$$[A_2]=\begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & -[\phi'] & [0] \\ [0] & \frac{k}{r_0^2}[\phi] & [0] & [0] & -\frac{k}{r_0}[\phi] \\ [0] & \frac{1}{r_0}[\phi'] & [0] & \frac{k}{r_0}[\phi] & [0] \end{bmatrix} \quad (12.261b)$$

$$[A_3]=\begin{bmatrix} [0] & [0] & [\phi'] & -[\phi] & [0] \\ [0] & [0] & \frac{-k}{r_0}[\phi] & [0] & -[\phi] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (12.261c)$$

$$\left.\begin{aligned} [N_1]&=\mathrm{diag}([\phi],[\phi],[\Phi],[0],[0]) \\ [N_2]&=\mathrm{diag}([0],[0],[0],[\phi],[\phi]) \end{aligned}\right\} \quad (12.262)$$

$$\{p\}_k=[\{p_z\}_k^T \quad \{p_\theta\}_k^T \quad \{p_r\}_k^T]^T \quad (12.263)$$

利用数值积分法中的求积公式,可将(12.253)～(式12.255)变为配点格式。

(二)样条边界元法解岩土动态问题

1. 边界积分方程

在动态分中，如果假设岩土介质是一个各向同性的弹性体，则它的动力方程为

$$(A+G)u_{j,ji}(Q,t)+Gu_{i,jj}(Q,t)+b_i(Q,t)$$
$$-\rho_1\ddot{u}_i(Q,t)=0 \qquad i,j=1,2,3 \quad (12.264)$$

边界条件和初始条件与第七章相同，见式(7.3)和式(7.4)。

式(12.264)可以转化为边界积分方程。目前，将式(12.264)化为边界积分方程主要有四种方法：(1)变换法，这种方法先通过对时间变量作拉普拉斯变换或傅里叶变换，消去时

间变量，将式（12.264）转化为椭圆型方程，然后建立这个椭圆型方程的边界积分方程；（2）差分法，这个方法先将$\ddot{u}$对时间t差分，然后建立式（12.264）的边界积分方程；（3）含时间基本解的直接法，这个方法采用含时间t的基本解乘式（12.264）两边，然后对空间区域和时间区域进行积分建立边界积分方程；（4）不含时间基本解的直接法。上述这四种方法对热传导问题、扩散问题、电磁场问题及波的传播问题也适用。本节利用第三种方法及第四种方法建立式（12.264）的边界积分方程。

（1）含时间基本解的直接法。将含时间的基本解u^*_{kl}乘式（12.264）两边可得：

$$\int_{t_0}^{t_L}\int_V [(A+G)u_{j,ji}+Gu_{i,jj}+b_i - \rho_1 \ddot{u}]u^*_{kl}dVdt=0 \qquad (12.265)$$

式中u^*_{kl}满足下列方程：

$$(A+G)u_{ki,il}+Gu_{kl,ii}-\rho_1 \ddot{u}^*_{kl} + \delta_{kl}\delta(P,Q)\delta(\tau,t)=0 \qquad (12.266)$$

利用分部积分法将式（12·265）变为

$$G_{kl}(P)u_l(P,t_L)=\int_{t_0}^{t_L}\int_s [u^*_{kl}(P,Q_0,t')p_l(Q_0,t) - p^*_{kl}(P,Q_0,t')]dsdt+\int_{t_0}^{t_L}\int_V u^*_{kl}(P,Q,t')b_l(Q,t)dVdt + \int_V A_k(P,Q,\tau)bV \qquad k,l=1,2,3 \qquad (12.267)$$

式中　$t'=t-t_L \qquad t_0\leqslant t\leqslant t_L$

$$A_k=\rho_1[\overline{u}_{l0}(Q)u^*_{kl}(P,Q,t_L)-\overline{v}_{l0}(Q)\dot{u}^*_{kl}(P,Q,t_L)] \qquad (12.268)$$

$$\dot{u}^*_{kl} = \partial u^*_{kl}/\partial t \qquad (12.269)$$

其中$\overline{u}_{l0}$及$\overline{v}_{l0}$分别为初始位移和初始速度的已知值。

如果体力分量b_l不随时间变化，则它的效应可由静态分析确定，因此在动态分析中可将体力项略去。在地震发生前，初始位移和初始速度为零，即

$$\overline{u}_{l0} = 0\,, \qquad \overline{v}_{l0} = 0 \quad (t = 0) \qquad (1.2270)$$

因此，式（12.267）可以写成下列形式：

$$C_{kl}(P)u_l(P,t_L) = \int_{t_0}^{t_L}\int_s [u^*_{kl}(P,Q_0,t')p_l(Q_0,t) - p^*_{kl}(P,Q_0,t')u_l(Q_0,t)]dsdt \qquad (12.271)$$

式中u^*_{kl}及p^*_{kl}为含时间的基本解，由式（12.266）求出，具体形式见文献[4]和文献[5]。

式（12.271）可以写成下列形式：

$$C(P)u(P,t_L) + \int_{t_0}^{t_L}\int_s [p^*(P,Q_0,t')u(Q_0,t) - u^*(P,Q_0t')p(Q_0,t)]dsdt = 0 \qquad (12.272)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} u &= [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T \\ p &= [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T \end{aligned}\right\} \qquad (12.273)$$

$$u^* = \begin{bmatrix} u^*_{11} & u^*_{12} & u^*_{13} \\ u^*_{21} & u^*_{22} & u^*_{23} \\ u^*_{31} & u^*_{32} & u^*_{33} \end{bmatrix} \qquad (12.274)$$

$$p^* = \begin{bmatrix} p^*_{11} & p^*_{12} & p^*_{13} \\ p^*_{21} & p^*_{22} & p^*_{23} \\ p^*_{31} & p^*_{32} & p^*_{33} \end{bmatrix} \qquad (12.275)$$

（2）不含时间基本解的直接法。这个方法详见第七章 §7.1。由第七章可知：

$$C_{kl}(P)u_l(P,t)=\int_s[u_{kl}^*(P,Q_0)p_l(Q_0,t)-p_{kl}^*(P,Q_0)$$

$$\times u_l(Q_0,t)]ds+\rho_1\{C_{kl}(P)u_{el}(P)+\int_s[u_{kl}^*(P,Q_0)p_{el}^n(Q_0)$$

$$-p_{kl}^*(P,Q_0)u_{el}^n(Q_0)]ds\}\ddot{a}_e^n(t)\quad k,l,e=1,2,3\quad(12.276)$$

式中ρ_1为岩土密度。由此可知：

$$C(P)u(P,t)=\int_s[u^*(P,Q_0)p(Q_0,t)-p^*(P,Q_0)u(Q_0,t)$$

$$\times ds=\rho_1\{C(P)u^n(P)-\int_s[u^*(P,Q_0)p^n(Q_0)$$

$$-p^*(P,Q_0)u^n(Q_0)]ds\}\{\ddot{a}^n(t)\}\quad(12.277)$$

式中u、p、u^*和p^*的形式与式（12.273）～式（12.275）相同，而$C(P)$、u^n、p^n及$\{\ddot{a}^n\}$为

$$C(P)=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{pmatrix}\quad(12.278)$$

$$u^n=\begin{vmatrix}u_{11}^n&u_{21}^n&u_{31}^n\\u_{12}^n&u_{22}^n&u_{32}^n\\u_{13}^n&u_{23}^n&u_{33}^n\end{vmatrix}\quad n=0,1,2\cdots,\infty\quad(12.279)$$

$$p_n=\begin{vmatrix}p_{11}^n&p_{21}^n&p_{31}^n\\p_{12}^n&p_{22}^n&p_{32}^n\\p_{13}^n&p_{23}^n&p_{33}^n\end{vmatrix}\quad(12.280)$$

$$\{\ddot{a}^n\}=[\ddot{a}_1^n\quad\ddot{a}_2^n\quad\ddot{a}_3^n]^T\quad(12.281)$$

如果P点为边界上的光滑点，则

$$C_{kl}=\begin{cases}\frac{1}{2} & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases} \tag{12.282}$$

如果P为区域内的点，则$C_{kk}=1$，$C_{kl}=0$（$k\neq l$）。

图12.17是圆柱厚壳与岩土介质的相互关系图，壳体周围的介质是一个半无限空间弹性体。对于半无限空间弹性体可以看作是一个轴对称弹性体，这个问题的分析可以采用本章第四节介绍的方法。

2．样条边界元法

（1）第一种方法：直角坐标系的位移和面力与圆柱坐标系的位移和面力有下列关系：

$$u=[T]\tilde{u} \qquad p=[T]\tilde{p} \tag{12.283}$$

式中 $\tilde{u}=[u_r\ u_\theta\ u_z]^T$，$u=[u_1\ u_2\ u_3]^T$

$\tilde{p}=[p_r\ p_\theta\ p_z]^T$，$p=[p_1\ p_2\ p_3]^T$

$$[T]=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{12.284}$$

设
$$\left.\begin{aligned}u_r&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(s)]\{u_r(t)\}_k\cos k\theta\\ u_\theta&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(s)]\{u_\theta(t)\}_k\sin k\theta\\ u_z&=\sum_{k=0}^{R}[\phi(s)]\{u_z(t)\}_k\cos k\theta\end{aligned}\right\} \tag{12.285}$$

则
$$\tilde{u}=\sum_{k=0}^{R}[S]_k[\tilde{N}]\{u(t)\}_k \tag{12.286}$$

同理 $\tilde{p}=\sum_{k=0}^{R}[S]_k[\widetilde{N}]\{p(t)\}_k$ (12.287)

式中 $[S]_k=\mathrm{diag}(\cos k\theta,\ \overline{\sin k\theta},\ \cos k\theta)$ (12.288)

$[\widetilde{N}]=\mathrm{diag}([\phi],\ [\phi],\ [\phi])$ (12.289)

$$\left.\begin{aligned}\{u(t)\}&=[\{u_r(t)\}_k^T\quad\{u_\theta(t)\}_k^T\quad\{u_z(t)\}_k^T]^T\\\{p(t)\}_k&=[\{p_r(t)\}_k^T\quad\{p_\theta(t)\}_k^T\quad\{p_z(t)\}_k^T]^T\\\{V_c\}_k&=[V_{c0}\quad V_{c1}\quad V_{c2}\quad\cdots\quad V_{cx}]^T\end{aligned}\right\}\quad(12.290)$$

式中$V=u,p$；$c=r,\ \theta,\ z$；$x=N,\ N_m$。$\overline{\sin k\theta}$定义为

$$\overline{\sin k\theta}=\begin{cases}1 & k=0\\\sin k\theta, & k\neq 0\end{cases}\quad(12.391)$$

将式（12.286）及式（12.287）代入式（12.283）可得：

$$\left.\begin{aligned}u&=\sum_{k=0}^{R}[T][S]_k[\widetilde{N}]\{u(t)\}_k\\p&=\sum_{k=0}^{R}[T][S]_k[\widetilde{N}]\{p(t)\}_k\end{aligned}\right\}\quad(12.392)$$

同理可得：

$$\left.\begin{aligned}u^n&=\sum_{k=0}^{R}[T][S]_k[\widetilde{N}][\overline{u}]_k^n\\p^n&=\sum_{k=0}^{R}[T][S]_k[\widetilde{N}][\overline{p}]_k^n\end{aligned}\right\}\quad(12.393)$$

式中 $V=u,\ p$；$n=0,\ 1,\ ,\ 2\cdots,\ x$

$$[\overline{V}]_k^n=\begin{bmatrix}\{V\}_{rr}^n & \{V\}_{\theta r}^n & \{V\}_{zr}^n\\\{V\}_{r\theta}^n & \{V\}_{\theta\theta}^n & \{V\}_{z\theta}^n\\\{V\}_{rz}^n & \{V\}_{\theta z}^n & \{V\}_{zz}^n\end{bmatrix}\quad(12.394)$$

$$\{V\}_{rs}^{n}=[\ V_{rs}^{n}(s_0)\quad V_{rs}^{n}(s_1)\quad V_{sr}^{n}(s_2)\ \cdots V_{rs}^{n}(s_x)]^T$$

将式（12.292）和式（12.293）代入（12.277）可得：

$$C(P)u(P,t)=\sum_{k=0}^{R}\int_{\Gamma}([u^*]_k\{p(t)\}_k-[p^*]_k\{u(t)\}_k)rd\Gamma$$

$$-\rho_1[C(P)u^n(P)-\sum_{k=0}^{R}\int_{\Gamma}([u^*]_k[p]_k$$

$$-[p^*]_k[u]_k)rd\Gamma]\{\ddot{a}\} \tag{12.295}$$

式中 $$\{\ddot{a}\}=[\{\ddot{a}^0\}^T\ \ \{\ddot{a}^1\}^T\ \cdots\ \{\ddot{a}^x\}^T]^T \tag{12.296}$$

$$[V]_k=[[V]_k^0\quad [V]_k^1\quad [V]_k^2\quad \cdots [V]_k^x] \tag{12.297}$$

$$[V^*]_k=\int_0^{2\pi}V^*[T][S]_k[\widetilde{N}]d\theta \tag{12.298}$$

式中Γ为子午面的边界。

如果将整个边界Γ分为M个部分，而且每一个边界Γ_m又分为N_m等分，用B样条函数构成的基函数逼近边界未知量，设$P=s_j$（$j=0,1,2,\cdots N$），则式（12.295）可变为

$$C(s_j)[S]_k\{u\}_k=\sum_{k=0}^{R}([G]_k\{p\}_k-[\widetilde{H}]_k\{u\}_k)$$

$$-\rho_1[C(s_j)[S]_k[u]_k-\sum_{k=0}^{R}([G]_k[p]_k$$

$$-[\widetilde{H}]_k[u]_k)]\{\ddot{a}\} \tag{12.299}$$

由此可得：

$$[H]\{u\}-[G]\{p\}+\rho_1([H][u]-[G][p])\{\ddot{a}\}=0 \tag{12.300}$$

由第七章的§7·1可知：

$$\{\ddot{a}\}=[E]\{\ddot{u}\} \tag{12.301}$$

将式（12.301）代入式（12.300）可得：

$$[\widetilde{M}]\{\ddot{u}\}+[H]\{u\}=[G]\{p\} \tag{12.302}$$

式中 $[\widetilde{M}]=\rho_1([H][u]-[G][p])[E]$ （12.303）

（2）第二种方法：这个方法从式（12.272）出发。设

$$\left.\begin{aligned} u_r&=\sum_{k=0}^{R}\sum_{l=0}^{L}\sum_{i=0}^{N}u_{r\,il}\phi_i(s)\psi_l(t)\cos k\theta \\ u_\theta&=\sum_{k=0}^{R}\sum_{l=0}^{L}\sum_{i=0}^{N}u_{\theta\,il}\phi_i(s)\psi_l(t)\sin k\theta \\ u_z&=\sum_{k=0}^{R}\sum_{l=0}^{L}\sum_{i=0}^{N}u_{z\,il}\phi_i(s)\psi_l(t)\cos k\theta \end{aligned}\right\} \tag{12.304}$$

由此可知：

$$\left.\begin{aligned} u_r&=\sum_{k=0}^{R}([\psi]\otimes[\phi]\{u_r\}_k\cos k\theta \\ u_\theta&=\sum_{k=0}^{R}([\psi]\otimes[\phi])\{u_\theta\}_k\sin k\theta \\ u_z&=\sum_{k=0}^{R}([\psi]\otimes[\phi])\{u_z\}_k\cos k\theta \end{aligned}\right\} \tag{12.305}$$

因此 $\tilde{u}=\sum_{k=0}^{R}[S]_k[N]\{u\}_k$ （12.306）

式中 $[N]=\mathrm{diag}([\psi]\otimes[\phi],[\psi]\otimes[\phi],[\psi]\otimes[\phi])$ （12.307）

$\{u\}_k=[\{u_r\}_k^T\quad\{u_\theta\}_k^T\quad\{u_z\}_k^T]^T$ （12.308）

同理 $\tilde{p}=\sum_{k=0}^{R}[S]_k[N]\{p\}_k$ （12.309）

式中 $\{p\}_k=[\{p_r\}_k^T\quad\{p_\theta\}_k^T\quad\{p_z\}_k^T]^T$ （12.310）

将式（12.306）和式（12.309）代入式（12.283）可得：

$$\left.\begin{aligned}u&=\sum_{k=0}^{R}[T][S]_k[N]\{u\}_k\\p&=\sum_{k=0}^{R}[T][S]_k[N]\{p\}_k\end{aligned}\right\}\tag{12.311}$$

将式（12.311）代入式（12.272）可得：

$$C(P)u(P,t)=\sum_{k=0}^{R}\int_{t_0}^{t_L}\int_{\Gamma}([u^*]_k\{p\}_k-[p^*]\{u\}_k)d\Gamma dt\tag{12.312}$$

式中
$$\left.\begin{aligned}[u^*]_k&=\int_0^{2\pi}u^*[T][S]_k[N]r(s)d\Gamma\\[p^*]_k&=\int_0^{2\pi}p^*[T][S]_k[N]r(s)d\Gamma\end{aligned}\right\}\tag{12.313}$$

如果将整个边界Γ分为M个部分，而且每一个边界Γ_m又分为N_m等分，时域$[0,t_L]$分为L等分，$\phi(s)$和$\psi(t)$为B样条函数，$P=s_j$（$j=0,1,2,\cdots,N$），则式（12·312）可变为

$$C(s_j)[S]_k\{u\}_k=\sum_{k=0}^{R}([G]_k\{p\}_k-[\widetilde{H}]_k\{u\}_k)\tag{12.314}$$

由此可得：

$$[H]\{u\}=[G]\{p\}\tag{12.315}$$

（三）建立壳体与介质的耦合方力方程

1．壳体与介质交界面的连续条件

（1）在壳体与介质界面上，两者的位移在任一点都相等，即

$$\left.\begin{aligned}u_{rA}&=u_{rB}\\u_{\theta A}&=u_{\theta B}\\u_{zA}&=u_{zB}\end{aligned}\right\}\tag{12.316}$$

式中A代表壳体，B代表介质；$u_{rA}=w$，$u_{\theta A}=v$，$u_{zA}=u$。

（2）在壳体与介质交界面上，两者的面力在任点应满足平衡条件

$$\left.\begin{aligned} p_{rA} &= -p_{rB} \\ p_{\theta A} &= -p_{\theta B} \\ p_{zA} &= -p_{zB} \end{aligned}\right\} \qquad (12.317)$$

2．建立耦合动力方程

（1）第一种方法：这个方法从式（12·251）和式（12.302）出发。利用式（12.251）、式（12·302）和交界面条件可以建立壳体与介质的耦合动力方程，具体方法与§12.7相同。

（2）第二种方法：这个方法从式（12.251）和式（12.315）出发。利用式（12.251）、式（12.315）和交界面条件可以建立壳体与介质的耦合动力方程。

（四）求解壳体与介质耦合动力问题

当壳体与介质的耦合动力方程建立后，由此可求出壳体与介质耦合体系的动力特性及动力响应，具体方法与前面相同。

§12.7 结构与地基耦合动力问题

结构与地基的共同作用，在工程中普遍存在，例如高层建筑结构与地基的相互作用，坝体与地基的相互作用。本节介绍结构与地基耦合动力问题的计算方法。

（一）上部结构的动力方程

上部结构的动态分析方法很多，例如解析法、有限元法、样条有限点法和能量配点法。利用这些方法可以建立上部结构的动力方程：

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{f\} \tag{12.318}$$

（二）地基的动力方程

地基可看作是一个半无限空间的弹性体（图12.18）。地基的动力方程可以利用样条边界元法建立，一般采用下列两种计算格式：（1）含时间基本解的直接法格式；（2）不含时间基本解的直接法格式，见§12.6。本节采用不含时间基本解的直接法。由第七章可知，地基的动力方程为

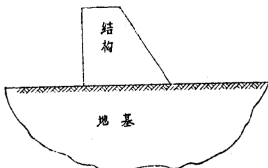


图 12.18

$$[\widetilde{M}]\{\ddot{u}\}+[H]\{u\}=[G]\{p\} \tag{12.319}$$

式中只含边界未知量。

（三）结构与地基的耦合动力方程

将式（12.318）按结构与地基的接触点和非接触点分离，可得下列方程：

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}_A \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}_A + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_A \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_A \tag{12.320}$$

由此可得：

$$\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{bmatrix}_A \{\ddot{u}_1\}_A + \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix}_A \{\ddot{u}_2\}_A + \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}_A \{u_1\}_A$$

$$+\begin{bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{bmatrix}_A \{u_2\}_A = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2 \end{Bmatrix}_A \qquad (12.321)$$

式中u_2、$\ddot{u}_2$和f_2分别为结构与地基接触边界点的位移，加速度及等效节点力。

$\{f_2\}_A$由下列公式确定：

$$\{f_2\}_A = [B]\{p_2\}_A \qquad (12.322)$$

式中 $$[B] = \int_\Gamma [N]^T[N]d\Gamma \qquad (12.323)$$

其中$[N]$为B样条函数或插值函数构成的形态矩阵。

将式（12.319）按地基与结构的接触点和非接触点分离，可得下列方程：

$$\begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}_B \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix}_B + \begin{bmatrix} H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}_B \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_B$$

$$= \begin{bmatrix} G_{22} & G_{23} \\ G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}_B \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}_B$$

由此可得：

$$\begin{bmatrix} M_{22} \\ M_{32} \end{bmatrix}_B \{\ddot{u}_2\}_B + \begin{bmatrix} M_{23} \\ M_{33} \end{bmatrix}_B \{\ddot{u}_3\}_B + \begin{bmatrix} H_{23} \\ H_{32} \end{bmatrix}_B \{u_2\}_B$$

$$+ \begin{bmatrix} H_{23} \\ H_{33} \end{bmatrix}_B \{u_3\}_B = \begin{bmatrix} G_{22} \\ G_{32} \end{bmatrix}_B \{p_2\}_B + \begin{bmatrix} G_{23} \\ G_{33} \end{bmatrix}_B \{p_3\}_B$$

$$(12.324)$$

结构与地基的接触条件为

$$\left.\begin{aligned} \{u_2\}_A &= \{u_2\}_B \\ \{p_2\}_A &= -\{p_2\}_B \end{aligned}\right\} \qquad (12.325)$$

利用式（12.324）可得：

$$\{p_2\}_B=[A](\begin{bmatrix} M_{22} \\ M_{32} \end{bmatrix}_B\{\ddot{u}_2\}_B+\begin{bmatrix} M_{23} \\ M_{33} \end{bmatrix}_B\{\ddot{u}_3\}_B$$

$$+\begin{bmatrix} H_{22} \\ H_{32} \end{bmatrix}_B\{u_2\}_B+\begin{bmatrix} H_{23} \\ H_{33} \end{bmatrix}_B\{u_3\}_B-\begin{bmatrix} G_{23} \\ G_{33} \end{bmatrix}_B\{p_3\}_B) \tag{12.326}$$

将式（12.326）代入式（12.321），考虑接触条件可得：

$$[\overline{M}]\{\ddot{U}\}+[\overline{K}]\{U\}=\{F\} \tag{12.327}$$

式中 $\{U\}=[\{\ddot{u}_1\}_A^T \quad \{\ddot{u}_2\}_A^T \quad \{\ddot{u}_3\}_B]^T$

$$\left.\begin{aligned} [\overline{M}]&=[[M_1] \quad [M_2] \quad [M_3]] \\ [\overline{K}]&=[[K_1] \quad [K_2] \quad [K_3]] \end{aligned}\right\} \tag{12.328}$$

$$\{F\}=[f_1^T \quad F_2^T \quad F_3^T]^T \tag{12.329}$$

其中 $[M_1]=[M_{11}^T \quad M_{21}^T \quad 0^T]_A^T$

$$[M_2]=\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \\ 0 \end{bmatrix}_A+[B][A]\begin{bmatrix} 0 \\ M_{22} \\ M_{32} \end{bmatrix}_B \tag{12.330}$$

$$[M_3]=[0^T \quad M_{23}^T \quad M_{33}^T]_B^T$$

$$[K_1]=[K_{11}^T \quad K_{21}^T \quad 0^T]_A^T$$

$$[K_3]=[0^T \quad K_{23}^T \quad K_{33}^T]_B^T$$

$$[K_2]=\begin{bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \\ 0 \end{bmatrix}_A+[B][A]\begin{bmatrix} 0 \\ K_{22} \\ K_{32} \end{bmatrix}_B \tag{12.331}$$

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}=[B][A]\begin{bmatrix} G_{23} \\ G_{33} \end{bmatrix}_B\{p_3\}_B \tag{12.332}$$

$$[A]=\begin{bmatrix} G_{22} \\ G_{32} \end{bmatrix}_B^{-1} \qquad (12.333)$$

如果考虑结构振动有阻尼，则结构与地基的耦合动力方程可写成下列形式：

$$[\overline{M}]\{\ddot{U}\}+[\overline{C}]\{\dot{U}\}+[\overline{K}]\{U\}=\{F\} \qquad (12.334)$$

式中

$$[\overline{C}]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (12.335)$$

（四）求解结构与基础的耦合动力问题

利用式（12.334）可求出结构与地基耦合体系的动力特性和动力响应，具体方法与前面相同。

如果结构是一个平面问题，则地基可作为半无限平面弹性问题计算；如果结构是一个空间问题，则地基可作为轴对称弹性体计算。对于半无限平面或半无限空间，利用样条边界元法计算时，边界Γ只考虑地面有限部分的边界。

§12.8 瞬态时变电磁场问题

（一）基本方程

在瞬态时变电磁场中，电磁场问题可归结为求解下列波动方程：

$$\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon \qquad (12.336)$$

$$\nabla^2 A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=-\mu J \qquad (12.337)$$

式中　$c^2 = 1/\mu\varepsilon$

如果考虑自由空间中的电磁场，则$\rho = 0$ 及$J = 0$。因此式（12.336）和式（12.337）可变为

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{12.338}
$$

式（12.336）及式（12.337）可以写成下列形式：

$$
\nabla^2 v - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b \qquad Q \in \Omega \tag{12.339}
$$

边界条件为

$$
\left.\begin{aligned}
v(Q,t) = \overline{v}(Q,t) \qquad Q \in \Gamma_v \\
q(Q,t) = \overline{q}(Q,t) \qquad Q \in \Gamma_q
\end{aligned}\right\} \tag{12.340}
$$

初始条件为

$$
\left.\begin{aligned}
v(Q,t) = v_0(Q) \\
\dot{v}(Q,t) = \dot{v}(Q)
\end{aligned}\right\} \quad t = t_0, Q \in \Omega \tag{12.341}
$$

式中　$q = \partial v/\partial n$,　　$\dot{v} = \partial v/\partial t$

$v = u,\ A$;　　$b = -\rho/\varepsilon,\ -\mu J$

（二）边界积分方程

目前对波动方程建立边界积分方程有四种方法：（1）变换法。这个方法先对波动方程作时间变量的Lalace变换或Fourier变换，然后建立它的边界积分方程；（2）差分法。这个方法先对$\partial^2 v/\partial t^2$进行二阶差分，然后建立波动方程的边界积分方程；（3）利用含时间的基本解直接建立波动方程的边界积分方程；（4）利用不含时间的基本解直接建立波动方程的边界积分方程。本节只介绍第四种方法建立波动方程的边界积分方程。

利用加权残数法可将式（12.339）化为下列边界积分方程：

$$C(p)v(P,t)=\int_{\Gamma}[v^{*}(P,Q_0)q(Q_0,t)-q^{*}(P,Q_0)$$

$$\times v(Q_0,t)]d\Gamma+f_1(P,t)+f(P,t) \qquad (12.342)$$

式中 $f(P,t)=-\int_{\Omega}v^{*}(P,)b(Q,t)d\Omega \qquad (12.343)$

$$f_1(P,t)=-\frac{1}{c^2}\int_{\Omega}v^{*}(P,Q)\ddot{v}(Q,t)d\Omega \qquad (12.344)$$

$$\left.\begin{aligned} v^{*}(P,Q)&=-\frac{1}{2\pi}\ln r \qquad &(二维问题)\\ v^{*}(P,Q)&=1/4\pi r \qquad &(三维问题)\end{aligned}\right\} \qquad (12.345)$$

式（12.342）不仅含有边界未知量，而且还含有 域内未知量。为了将域内积分化为边界积分，设

$$\ddot{v}(Q,t)=\sum_{e=0}^{\varepsilon}p^{e}(Q)\ddot{\alpha}^{e}(t) \qquad (12.346)$$

将式（12.346）代入式（12.344）可得：

$$f_1(P,t)=-\sum_{e=0}^{\varepsilon}\frac{1}{c^2}\left(\int_{\Omega}v^{*}(P,Q)P^{e}(Q)d\Omega\right)\ddot{\alpha}^{e}(t)$$

$$(12.347)$$

如果设 $\nabla^2\psi^{e}=p^{e} \qquad on \quad \Omega \qquad (12.348)$

则 $\int_{\Omega}v^{*}p^{e}d\Omega=-C(P)\psi^{e}(P)+\int_{\Omega}[v^{*}(P,Q_0)\eta^{e}(Q_0)$

$$-q^{*}(P,Q_0)\psi^{e}(Q_0)]d\Gamma \qquad (12.349)$$

式中 $\eta^{e}=\partial\psi^{e}/\partial n$

将式（12.349）代入式（12.342）可得下列边界积分方程：

$$C(P)v(P,t)=\int_{\Gamma}[v^{*}(P,Q_0)q(Q_0,t)-q^{*}(P,Q_0)$$

$$v(Q_0t)]d\Gamma+\frac{1}{c^2}\sum_{e=0}^{\varepsilon}\left(C(P)\psi^{e}(p)-\int_{\Gamma}[v^{*}(P,Q_0)\eta^{e}(Q_0)\right.$$

$$-q^*(\mathrm{P},Q_e)\psi^e(Q_e)]d\Gamma)\ddot{\alpha}^e(t)+f(\mathrm{P},t) \quad (12.350)$$

式中ψ^e可以由式（12.348）确定。例如，如果设

$$p^e(Q)=r(\mathrm{P}_e,Q) \quad (12.351)$$

则由式（12.348）可得：

$$\psi^e(Q)=\frac{1}{6}r^3(\mathrm{P}_e,Q) \quad (12.352)$$

式中r为P_e点至Q点的距离。

（三）样条边界元法

本节以二维问题为例。如果将整个边界Γ分为M个部分，则式（12.350）可变为

$$C(P_i)v(P_i,t)-\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m}[v^*(P_i,s)q(s,t)$$

$$-q^*(P_i,s)v(s,t)]d\Gamma-\frac{1}{c^2}\sum_{e=0}^{z}(C(P_i)\psi^e(P_i)$$

$$-\sum_{m=0}^{M}\int_{\Gamma_m}[v^*(P_i,s)\eta^e(s)-q^*(P_i,s)\psi^e(s)]d\Gamma)\ddot{\alpha}^e(t)$$

$$=f(P_i,t) \quad (12.353)$$

设
$$\left.\begin{aligned} &v=[\phi]\{v\}_m \qquad q=[\phi]\{q\}_m \\ &\psi^e=[\phi][\psi]_m^e \qquad \eta^e=[\phi][\eta]_m^e \end{aligned}\right\} \quad (12.354)$$

式中
$$[\phi]=[\phi_0(s)\quad \phi_1(s)\quad \phi_2(s)\quad \cdots\quad \phi_z(s)]$$
$$\{v\}_m=[v_0(t)\quad v_1(t)\quad v_2(t)\quad \cdots\quad v_z(t)]^T$$
$$\{q\}_m=[q_0(t)\quad q_1(t)\quad q_2(t)\quad \cdots\quad q_z(t)]^T$$
$$\left.\begin{aligned} &[\psi]_m^e=[\ \psi_i^e]_m \\ &[\eta]_m^e=[\ \eta_i^e]_m \end{aligned}\right\} \quad i,e=0,1,2,\cdots,z \quad (12.355)$$

$$[\psi_i^e]_m = \begin{bmatrix} \psi_0^1 & \psi_0^2 & \cdots & \psi_0^n \\ \psi_1^1 & \psi_1^2 & \cdots & \psi_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_n^1 & \psi_n^2 & \cdots & \psi_n^n \end{bmatrix} \tag{12.356}$$

其中$\phi_i(s)$为三次B样条函数构成的基函数：

$$\phi_i(s) = \frac{10}{3}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h_m} - i\right) - \frac{4}{3}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h_m} - i + \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{3}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h_m} - i - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h_m} - i + 1\right) + \frac{1}{6}\varphi_3\left(\frac{s-s_0}{h_m} - i - 1\right) \tag{12.357}$$

它满足下列条件：

$$\phi_i(s_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

将式（12.354）代入式（12.353）可得：

$$[H]\{v\} = [K]\{q\} + ([H][\psi] - [K][\eta])\{\ddot{\alpha}\} + \{f\} \tag{12.358}$$

因为 $\{\ddot{v}\} = [p]\ \{\ddot{\alpha}\}$ （12.359）

因此 $\{\ddot{\alpha}\} = [E]\ \{\ddot{v}\}$ （12.360）

式中 $[E] = [p]^{-1}$ （12.361）

将式（12.360）代入式（12.358）可得：

$$[M]\{\ddot{v}\} + [H]\{v\} = [K]\{q\} + \{f\} \tag{12.362}$$

式中 $[M] = ([K][\eta] - [H][\psi])[E]$ （12.363）

式（12.362）是一个常系数的微分方程，利用时间积分的样条函数方法很容易求解，详见文献[12]，式（12.362）与边界条件和初始条件有关，求解时必须引入边界条件和初始条件。当边界未知量确定后，利用式（12.350）的离散化格式可求出域内任

一点p的$v(p,t)$值。当$u(p,t)$和$A(p,t)$确定后，利用相应的公式即可求出电磁场问题的各个物理量。

§12.9 固体与电磁场耦合问题

固体与电磁场的耦合问题，在电气工程中普遍存在，本节对这个问题作一个简单介绍。假设固体为各项同性的弹性体。

弹性体的运动方程为

$$\sigma_{ij,j}+b_i=\bar{\rho}\ddot{u}_i \tag{12.364}$$

式中σ_{ij}为弹性体受电磁场影响的应力，即

$$\sigma_{ij}=D_{ijkl}u_{k,l}-L_{ijk}E_k \quad i,j,k,l=1,2,3 \tag{12.365}$$

u_k——弹性体的位移；

E_k——电场强度；

b_i——弹性体的体力分量；

$\bar{\rho}$——弹性体的密度；

D_{ijkl}——弹性常数张量；

L_{ijk}——压电常数张量。

如果只考虑静电场，则

$$E_k=-v_{,k} \tag{12.366}$$

式中v为电位。将式（12.365）和式（12.366）代入式(12.364)可得：

$$D_{ijkl}u_{k,lj}+L_{ijk}v_{,jk}+b_i=\bar{\rho}\ddot{u}_i \tag{12.367}$$

另外，由Maxwell方程可知：

$$d_{i,i}=\rho \tag{12.368}$$

式中ρ——电荷密度；

d_i——电位移分量，即

$$d_i=L_{ijk}u_{j,k}+F_{ij}E_j \tag{12.369}$$

式中F_{ij}——电导率张量。

将式（12.369）代入式（12.368）可得：

$$F_{ij}v_{,ij}-L_{ijk}u_{j,ki}+\rho=0 \tag{12.370}$$

电场的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &v=\overline{v} && \text{on}\quad \Gamma_v \\ &d=d_k n_k=\overline{d} && \text{on}\quad \Gamma_d \end{aligned}\right\} \tag{12.371}$$

弹性体的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &u_i=\overline{u_i} && \text{on}\quad \Gamma_u \\ &p_i=\sigma_{ij}n_j=\overline{p_i} && \text{on}\quad \Gamma_p \end{aligned}\right\} \tag{12.272}$$

初始条件为

$$\left.\begin{aligned} &u_i(Q,t_0)=\overline{u_{i0}}(Q) \\ &\dot{u}_i(Q,t_0)=\dot{\overline{u_{i0}}}(Q) \end{aligned}\right\} \tag{12.373}$$

由上述可知，如果弹性体在电磁场中受力，则它的应力与电磁场有关。这个问题可以利用样条边界元法求解。

§12.10 附 录

（一）圆柱坐标系的基本解

$$\left.\begin{aligned} U_{ij}&=\frac{1}{16\pi(1-\mu)}\left[\frac{(3-4\mu)}{R}f_{ij}+\frac{1}{R^3}g_{ij}\right]T_{ij} \\ P_{ij}&=-\frac{1}{8\pi(1-\mu)}\left[\frac{(1-2\mu)}{R^3}p_{ij}+\frac{1}{R^5}q_{ij}\right]T_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{12.374}$$

式中 $f_{11}=\cos\theta$ $\quad f_{13}=0$ $\quad f_{22}=\cos\theta$

$f_{31}=0$ $\quad f_{33}=1$ $\quad f_{12}=-1$

$f_{21}=1$ $\quad f_{23}=0$ $\quad f_{32}=0$

$$g_{11} = -r\rho + (r^2 + \rho^2)\cos\theta - r\rho\cos^2\theta$$

$$g_{13} = -\widetilde{\rho z} + \widetilde{rz}\cos\theta$$

$$g_{22} = r\rho - r\rho\cos^2\theta$$

$$g_{31} = r\widetilde{z} - \rho z^2\cos\theta$$

$$g_{33} = \widetilde{z^2}$$

$$g_{12} = -\rho^2 + r\rho\cos\theta$$

$$g_{21} = r^2 - r\rho\cos\theta$$

$$g_{23} = \widetilde{rz} \qquad g_{32} = \widetilde{\rho z}$$

$$p_{11} = n_1\rho + a\cos\theta - 2n_1\rho\cos^2\theta$$

$$p_{13} = n_2\rho + (n_1\widetilde{z} - n_2 r)\cos\theta$$

$$p_{22} = n_1\rho + a\cos\theta - 2n_1\rho\cos^2\theta$$

$$p_{31} = -n_1\widetilde{z} + n_2 r - n_1\rho\cos\theta$$

$$p_{33} = a - n_1\rho\cos\theta$$

$$p_{12} = -a + 2n_1\rho\cos\theta$$

$$p_{21} = a - 2n_1\rho\cos\theta$$

$$p_{23} = n_1\widetilde{z} - n_2 r \qquad p_{32} = n_2\rho$$

$$q_{11} = -r\rho a + [(r^2 + \rho^2)a + n_1 r^2\rho]\cos\theta - [r\rho a - \rho n_1(r^2 + \rho^2)^2]\cos^2\theta + n_1 r\rho\cos^3\theta$$

$$q_{13} = -\rho\widetilde{z}a + (\widetilde{rz}a + n_1\rho^2\widetilde{z})\cos\theta - n_1 r\rho\widetilde{z}\cos^2\theta$$

$$q_{22} = r\rho a - n_1 r\rho^2\cos\theta - r\rho a\cos^2\theta$$

$$q_{31} = r\widetilde{z}a - (\rho\widetilde{z}a - n_1 r\widetilde{\rho z})\cos\theta + n_1\rho^2\widetilde{z}\cos^2\theta$$

$$q_{12} = -\rho^2 a + r\rho(a + n_1 r^2\rho)\cos\theta - n_1 r\rho^2\cos^2\theta$$

$$q_{21} = r^2 a - r\rho(a + n_1 r^2\rho)\cos\theta + n_1 r\rho^2\cos^2\theta$$

$$q_{23} = r\widetilde{z}a - n_1 r\widetilde{\rho z}\cos\theta$$

$$q_{32} = r\widetilde{z}a - (\widetilde{\rho z}a - n_1 r\rho\widetilde{z})\cos\theta + n_1\rho^2\widetilde{z}\cos^2\theta$$

其中 $a=n_1 r+n_2\tilde{z}$

$R^2=r^2+\rho^2+z^2-2r\rho\cos\theta$

$\tilde{z}=z-\xi$

$$T_{ij}=\begin{cases}1 & (i,j)\in s_1\\ \sin\theta & (i,j)\in s_2\end{cases}$$

$S_1=\{(i,j):(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$

$S_2=\{(i,j):(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$

n_1和n_2为子午面边界曲线法线向量的分量，即

$$n_1=\sqrt{1-n_s^2}\quad,\quad n_2=n_s$$

（二）扁壳的简化计算方法

扁壳的基本微分方程可写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&D\nabla^4 w=\nabla^2\varphi/R+q\\&\nabla^4\varphi=-Eh\nabla^2 w/R\end{aligned}\right\}\tag{12.375}$$

设 $w=w_1(x,y)+w_2(x,y)$ （12.376）

其中w_1为下列方程的解：

$$D\nabla^4 w_1=q\tag{12.377}$$

则式（12.375）可以变为下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 F=0\\&\nabla^2 G=0\end{aligned}\right\}\tag{12.378}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&F(x,y)=D\nabla^2 w_2-\varphi/R\\&G(x,y)=\nabla^2\varphi+Eh(w_1+w_2)/R\end{aligned}\right\}\tag{12.379}$$

由上述可得：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 F=0 && \in\Omega\\&F=\overline{F} && \in\Gamma\end{aligned}\right\}\tag{12.380}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 G = 0 && \in \Omega \\ &G = \overline{G} && \in \Gamma \end{aligned}\right\} \tag{12.381}$$

$$\left.\begin{aligned} &D\nabla^2 w_2 = F + \varphi/R && \in \Omega \\ &\nabla^2 \varphi = G - Eh(w_1 + w_2)/R && \in \Omega \\ &w_2 = \overline{w_2} \qquad \varphi = \overline{\varphi} && \end{aligned}\right\} \tag{12.382}$$

式中w为扁壳挠度，φ为扁壳应力函数，R为扁壳曲率半径，h为扁壳厚度。

如果边界值已知，由式（12.379）及式（12.380）可求出F及G。当F及G确定后，利用样条边界元法即由式（12.382）求出w_2及φ值。

参 考 文 献

［1］秦荣，断裂力学问题的样条边界元法，广西大学，1986年。

［2］秦荣，接触问题的样条边界元法，广西大学，1987年。

［3］秦荣.秦俊，电磁场问题的样条边界元法，广西大学，1987年。

［4］C.A, Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. wrobel, Boundary Element Techniques, 1984年。

［5］田中正隆，电中喜久昭，境界要素法—基础及应用（日文），丸善株式会社，1982年。

［6］盛剑霓等，电磁场数值分析，科学出版社，1984年。

［7］曾余庆等，电磁场有限单元法，科学出版社．1982年。

［8］C.A. Brebbia(Edited), Progress in Bounbary Element Methvds, Vol. 1, Vol. 2, Pentech Press, 1983年。

396209

[9]秦荣，流体与薄壳的耦合动力问题，广西大学，1986年。

[10]秦荣，旋转薄壳分析的能量配点，广西大学，1982年。

[11]秦荣，能量配点法及其应用，《工程力学》，1984年创刊号。

[12]秦荣，求解结构动力反应的样条函数方法，《工程力学》，2(1985)。

333206 024
10.9
样条边界元法
5.90元